(i) Efectuando el producto, tenemos

$$z_1z_2 = |z_1|\,|z_2|\,(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)\,(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2)$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2) + (\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2)\,i]$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,[\cos\,(\varphi_1+\varphi_2) + i\operatorname{sen}\,(\varphi_1+\varphi_2)]\,.$$

(ii) De forma semejente, si $z_2 \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)}{|z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2)} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)\,(\cos\varphi_2 - i\operatorname{sen}\varphi_2) \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos\,(\varphi_1-\varphi_2) + i\operatorname{sen}\,(\varphi_1-\varphi_2)]\ .
\end{aligned}$$

La conclusión es inmediata. □

Junto con las formas vectorial, binómica y polar de un número complejo conviene considerar una cuarta forma que resulta útil para calcular potencias y raíces de números complejos. La motivación hay que buscarla en los desarrollos en serie de ciertas funciones bien conocidas. En análisis matemático se demuestra (a partir de la fórmula de Taylor en el origen, también llamada fórmula de McLaurin) que

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\,, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad \text{y} \\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad ,
\end{aligned}$$

cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$. Si sustituimos formalmente x por el imaginario puro $i\varphi$ se obtiene, mediante manipulaciones no menos formales, la llamada **Fórmula de Euler**:

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \cdots \\
&= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \cdots \\
&= \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi.
\end{aligned}$$

Este argumento no es, desde luego, una prueba. Sin embargo, con esa motivación definimos

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi,$$

para $\varphi \in \mathbb{R}$, de tal forma que podemos escribir, para todo complejo $z = |z|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$,

$$z = |z|\, e^{i\varphi},$$

que es la **forma exponencial** de un número complejo. De la fórmula de Euler se sigue que

$$e^{\pi i} + 1 = 0\,,$$

curiosa identidad que relaciona los cinco números más importantes en matemáticas: 0, $1, i, \pi$ y e.

Como en el caso de los números reales, $s \in \mathbb{C}$ es una **raíz n-ésima** de $z \in \mathbb{C}$ si $s^n = z$. Veremos que todo número complejo no nulo tiene exactamente n raíces distintas, por lo que evitaremos escribir $\sqrt[n]{z}$ (salvo que z sea un número real no negativo). El siguiente resultado proporciona, además, la deseada interpretación geométrica de potencias y raíces de números complejos.

Proposición 6.3. *Sea $z = |z|\, e^{i\varphi}$ un complejo dado y $n \in \mathbb{N}$. Se cumple:*

(i) $z^n = |z|^n\, e^{in\varphi}$.
(ii) *Si $z \neq 0$, entonces z tiene exactamente n raíces n-ésimas, que son*

$$\sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demostración. (i) Por la Proposición 6.2 (i),

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi) = |z|^2\, e^{i2\varphi}.$$

La prueba se completa por inducción sobre n.

(ii) Empezaremos viendo que tales números complejos son raíces n-ésimas de z. En efecto, de acuerdo con (i) se tiene

$$\left[\sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}\right]^n = \left[\sqrt[n]{|z|}\right]^n e^{in\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)} = |z|\, e^{i(\varphi+2k\pi)} = |z|\, e^{i\varphi} = z.$$

Para ver que esas n raíces de z son distintas dos a dos efectuaremos su cociente de acuerdo con la Proposición 6.2 (ii). Dados $0 \leq k_1 < k_2 \leq n-1$,

$$\frac{\sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}\right)}}{\sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}\right)}} = \cos\left(\frac{2(k_1-k_2)\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2(k_1-k_2)\pi}{n}\right) \neq 1$$

puesto que $(k_1 - k_2)/n \notin \mathbb{Z}$.

Terminaremos probando que cualquier otra raíz n-ésima de z pertenece al conjunto considerado en (*ii*). En efecto, si $s = |s|\, e^{i\alpha}$ es raíz n-ésima de z, se deberá cumplir $s^n = z$, es decir, $|s|^n = |z|$ y $e^{in\alpha} = e^{i\varphi}$. Entonces,

$$\cos n\alpha = \cos\varphi \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen}\varphi,$$

lo que implica $(n\alpha - \varphi)/2\pi \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $(n\alpha - \varphi)/2\pi$ es congruente con k (módulo n) para cierto $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (recuérdese el Ejercicio 4.2 de la Sección 4.1). En ese caso, podemos escribir

$$(n\alpha - \varphi)/2\pi = k + pn,$$

con $p \in \mathbb{Z}$, es decir,

$$\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2p\pi.$$

Entonces,

$$s = |s|\, e^{i\alpha} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)},$$

que es uno de los n números complejos enumerados en (*ii*). □

Los afijos de las potencias sucesivas de $z = |z|\, e^{i\varphi}$ están situados sobre la curva del plano formada por los afijos de los números complejos $\left\{|z|^t\, e^{it\varphi} \mid t \geq 1\right\}$ (espiral de Arquímedes). Si $|z| > 1$ dicha curva se aleja del origen (véase Figura 6.5) y si $|z| < 1$ la curva se aproxima al origen sin alcanzarlo (véase Figura 6.6).

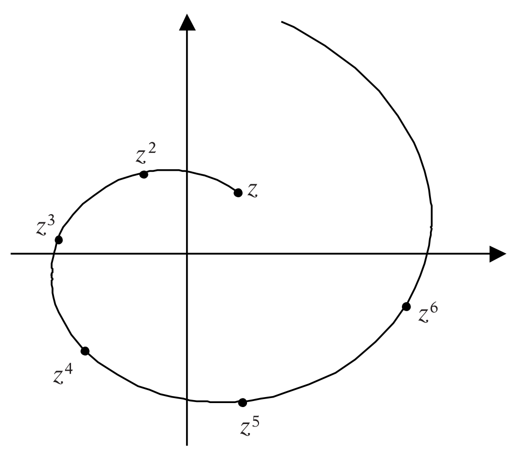

Figura 6.5. *Las espiras de la concha del ammonites aumentan su anchura de acuerdo con un factor constante, según observó Leonardo da Vinci. Este factor vale* $|z|^{2\pi} > 1$ *cuando* $|z| > 1$.

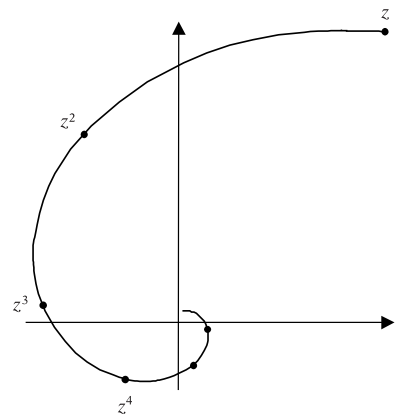

Figura 6.6. *Cuando* $|z| < 1$*, la espiral de Arquímedes se contrae con factor* $|z|^{2\pi} < 1$.

Como consecuencia de la Proposición 6.3, aunque el cuerpo $\mathbb{C}$ ha sido definido como una extensión de $\mathbb{R}$ en la cual -1 tiene raíces cuadradas, ahora sabemos que cualquier otro elemento de $\mathbb{C}$ tiene raíces n-ésimas en el propio $\mathbb{C}$ (¿cuáles son las raíces n-ésimas de 0?).

Ejemplo 6.1. La unidad tiene n raíces n-ésimas, cuyos afijos son los vértices del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unidad. La posición de dicho polígono queda determinada por el hecho de que el propio 1 es una de esas raíces. Las Figuras 6.7 y 6.8 muestran las raíces cúbicas y las raíces cuartas de la unidad, respectivamente.

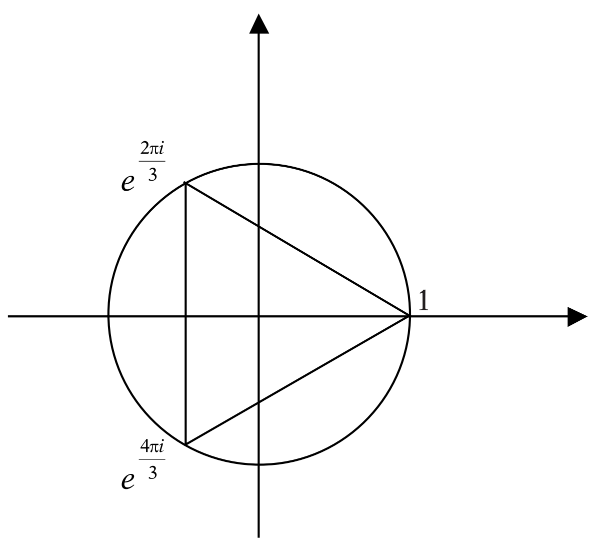

Figura 6.7. *Raíces cúbicas de* 1.

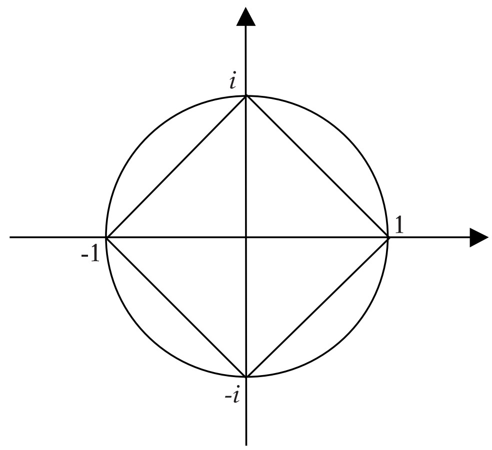

Figura 6.8. *Raíces cuartas de* 1.

6.3. **Ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos**

Supongamos que $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos, es decir, $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. Decimos que $z \in \mathbb{C}$ es una **raíz** (o un **cero**) de $p(x)$ cuando z es una solución de la ecuación algebraica $p(x) = 0$, es decir, al evaluar el polinomio $p(x)$ en $x = z$ se obtiene el número complejo $p(z) = 0$. Esto es equivalente a afirmar que $p(x)$ es un múltiplo de $x - z$, según muestra el siguiente resultado.

Teorema 6.2. ***(del resto)*** *Sean $p(x)$ un polinomio y $z \in \mathbb{C}$. Entonces, z es raíz de $p(x)$ si, y sólo si, $(x - z)$ divide a $p(x)$.*

Demostración. Empezaremos suponiendo que z es una raíz de $p(x)$. Usando el algoritmo de la división (Teorema 4.1) existen polinomios (únicos) cociente y resto, $q(x)$ y $r(x)$, tales que

$$p(x) = (x - z)\, q(x) + r(x),$$

donde $\deg r(x) < \deg (x - z) = 1$ o bien $r(x)$ es el polinomio 0, lo que implica que el polinomio $r(x)$ es una constante, $r(x) = r \in \mathbb{C}$. En la ecuación anterior, evaluando para $x = z$, obtenemos

$$p(z) = (z - z)\, q(z) + r,$$

es decir, $r = 0$. Por lo tanto $p(x) = (x - z)\, q(x)$, como se quería.

El recíproco es inmediato. Si $p(x) = (x - z)\, q(x)$, entonces

$$p(z) = (z - z)\, q(z) = 0$$

y z es una raíz de $p(x)$. $\square$