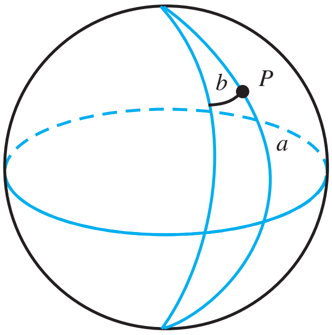
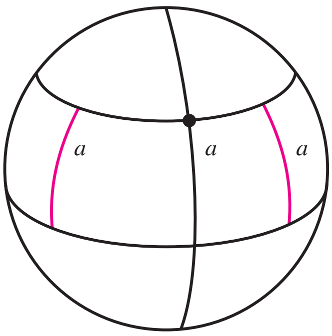
13 EL PLANO CARTESIANO

La necesidad de orientarse condujo a los seres humanos, desde la antigüedad más lejana, a confeccionar mapas o cartas geográficas y a relacionar los puntos de una superficie mediante números.

Para fijar una figura en el espacio o en un plano hace falta relacionarla con un sistema de referencia. En el actual sistema geográfico, cualquier lugar del mundo queda determinado con precisión si se conocen su latitud (a) y su longitud (b), es decir, si se tienen su distancia a al norte o al sur del ecuador, y su distancia b al este o al oeste del meridiano de Greenwich.



No basta con tener uno sólo de estos datos, ya que hay lugares que tienen la misma latitud a. Obsérvese la siguiente figura:



Todos los puntos del globo terrestre que están situados en el mismo paralelo, a una distancia a del ecuador tienen la misma latitud. Lo mismo sucede con sólo la longitud.

En matemáticas, el sistema de referencia se forma sobre un plano con dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto, que se denota con la letra O.

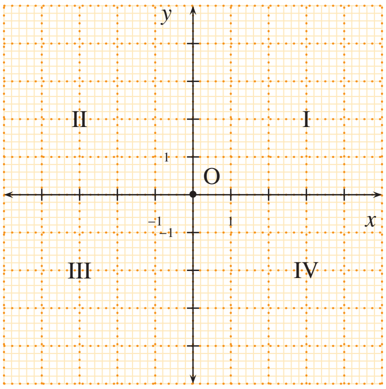
RENÉ DESCARTES (1596-1650)

Considerado el padre de la filosofía moderna, René Descartes fue un pensador completo, que abordó también el estudio de las ciencias. En física, sin saber que Galileo ya lo había hecho, resolvió el problema de las leyes que rigen el movimiento de caída de los cuerpos. En matemáticas, fue el creador de la geometría analítica, para lo que estableció el sistema de coordenadas ortogonales, conocido en la actualidad como sistema cartesiano. Asimismo, contribuyó a simplificar y normalizar la nomenclatura algebraica. Tras escribir las *Reglas para la dirección del espíritu* (1628-1629) y *El mundo* o *Tratado de la luz* (1633), en el que se incluyó su *Tratado del hombre*, publicó su obra de mayor relieve, el *Discurso del método* (1637), que servía de prólogo a la edición conjunta de tres ensayos de índole científica: la *Dióptrica*, la *Geometría* y los *Meteoros*. En 1641 escribió *Meditaciones metafísicas*, y en 1644, los *Principios de la filosofía*. Por último, en 1649 se publicó su obra *Pasiones del alma*.

Descartes fue el inventor de la notación algebraica moderna, en la cual las constantes están representadas por las primeras letras del alfabeto, a, b, c, y las variables o incógnitas por las últimas, es decir, x, y, z.

En el sistema de pensamiento de Descartes, la filosofía engloba a todas las ciencias. Representó el conocimiento como un árbol cuyas raíces son la metafísica y cuyo tronco es la física, del que salen tres ramas principales –la medicina, la mecánica y la ética– de las que derivan todas las otras ciencias. Consideraba que había tres sustancias: una infinita y autosubsistente, es decir, que existe por sí misma, a la que denominó *res infinita* e identificó con Dios, y dos sustancias finitas, que dependen para su existencia de la *res infinita*, a las que llamó *res cogitans* o sustancia pensante y *res extensa* o sustancia corpórea, cuya principal característica es la extensión en el espacio.

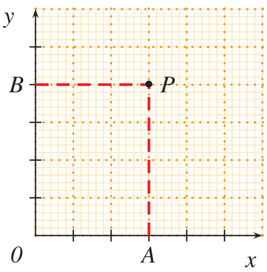
El pensamiento filosófico de Descartes se fundamenta en un método que consiste en tomar un punto de partida indudable sobre el que construir todo el conocimiento. En matemáticas creó la geometría analítica según el mismo principio, a partir de un sistema de coordenadas formado por dos rectas que se cortan en un punto, denominado origen.



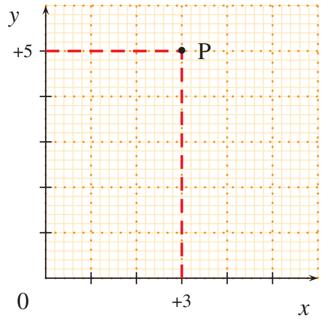
El punto O recibe el nombre de **origen de coordenadas**. Se escoge también una unidad de medida, con la que se marcan con signo positivo las distancias en las semirrectas desde el origen hacia arriba y hacia la derecha, y con signo negativo desde el origen hacia abajo y hacia la izquierda. El eje perpendicular se denomina **eje de abscisas** o eje de las *x*, mientras que el eje vertical se denomina eje de ordenadas o eje de las *y*. Este sistema de referencia se denomina sistema de ejes cartesianos o sistema cartesiano (de Cartesius, nombre latinalizado de René Descartes, filósofo y matemático francés del siglo XVII). Con ello, todo el plano queda dividido en cuatro cuadrantes (I, II, III y IV), que se numeran en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj.

13.1 COORDENADAS DE UN PUNTO: EJERCICIOS DE LOCALIZACIÓN DE PUNTOS Y OTRAS ACTIVIDADES EN EL PLANO CARTESIANO

Por cada punto P del plano pasan dos rectas perpendiculares entre sí y paralelas a cada uno de los ejes, es decir, pasa una recta paralela al eje de las *x* y una recta paralela al eje de las *y*.

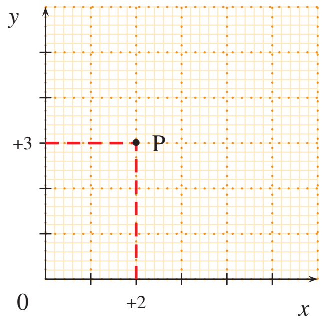


Estas rectas cortan los dos ejes en dos puntos, A y B. Si se consideran las distancias OA y OB, éstas representan la abscisa y la ordenada del punto P.

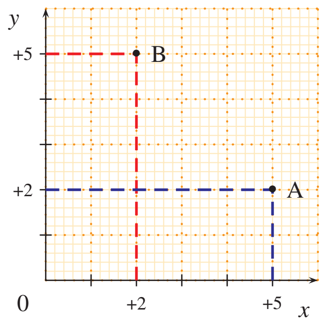


En la figura superior, el punto P tiene como abscisa +3 y como ordenada +5. Por ello, se dice que P tiene como coordenadas +3 y +5, que se escribe de la siguiente manera: P (+3, +5).

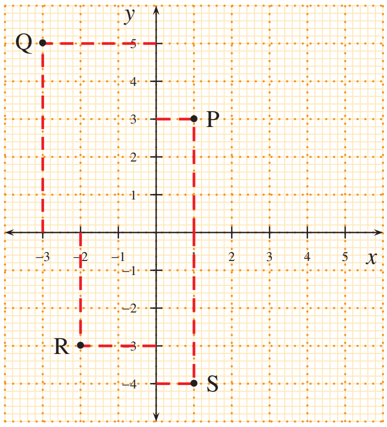
Si se fijan dos números en un orden determinado, por ejemplo +2 y +3, se dice que a este par ordenado le corresponde el punto P del plano que tiene como abscisa +2 y como ordenada +3, es decir, el punto P(+2, +3), como se muestra en la siguiente figura:

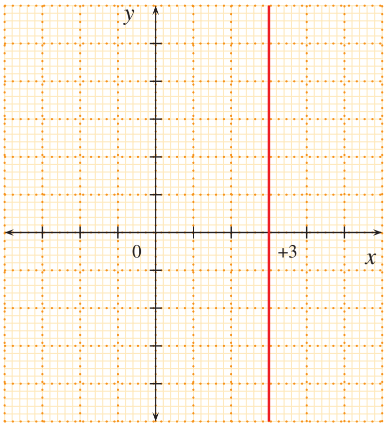


Se debe prestar atención en no confundir el eje de las abscisas con el de las ordenadas: el primer número representa el de la abscisa *x* y, en consecuencia, se marca sobre el eje horizontal de las *x*, mientras que el segundo es la ordenada y, por tanto, se indica sobre el eje vertical de las *y*. Por ello, los puntos A (+5, +2) y B (+2, +5) tienen localizaciones muy diferentes:



A continuación, se indican sobre un plano los puntos P (+1, +3), Q (–3, +5), R (–2, –3), S (+1, –4).





Se observa que si ambas coordenadas son positivas, el punto se encuentra en el primer cuadrante; si son ambas negativas, el punto se encuentra en el tercer cuadrante; si la abscisa es negativa y la ordenada positiva, se localiza en el segundo cuadrante, y, finalmente, si la abscisa es positiva y la ordenada negativa, se encuentra en el cuarto cuadrante.

Por consiguiente, se puede afirmar que a cada pareja ordenada de puntos le corresponde un punto del plano, y viceversa; a cada punto del plano le corresponde una pareja ordenada de puntos.

13.2 REPRESENTACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO DE REGIONES Y CONJUNTOS DE PUNTOS QUE SATISFACEN CONDICIONES ALGEBRAICAS SENCILLAS

Hasta ahora, se han representado en el plano puntos de la forma (+3, +5), (2, –6), (–4, –5), etc. No sólo se pueden encontrar como coordenadas de un punto números enteros, sino que también pueden ser números fraccionarios o reales. Así, se puede pedir colocar los puntos $\left(+\frac{1}{2}, -2\right)$, (0,632, 1,56), por ejemplo.

Supóngase que se fija una de las dos coordenadas, por ejemplo, que se fija la abscisa en el valor +3: pueden considerarse todas las parejas de puntos que tienen como abscisa el valor fijo +3, y como ordenada cualquier número de la recta real, es decir, –2, 22, 16,539 o no importa que otro valor. ¿Qué ocurre si se intenta representar este conjunto de puntos? Las ordenadas de las diferentes parejas de puntos pueden distar tan poco unas de otras que no se aprecia un espacio en blanco en su representación. En consecuencia, se forma una recta que tiene abscisa +3.

Como esta recta satisface la condición de que, en cada uno de sus puntos, su abscisa vale siempre 3, con independencia del valor de la ordenada, la expresión que representa a esta recta es $x = 3$, es decir, la primera coordenada (la que está en el eje de las x) siempre es 3.

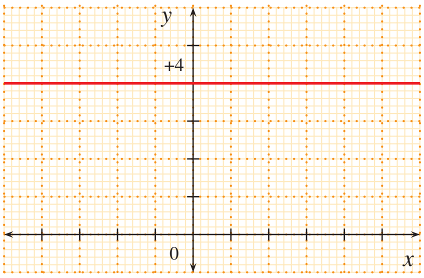
Mediante un razonamiento similar, se pueden considerar todas aquellas parejas de puntos que tienen una misma ordenada. Supóngase ahora que la ordenada que se considera es, por ejemplo, +4: se consideran entonces todas las combinaciones de coordenadas que como abscisa tienen a un número cualquiera de la recta real, y como ordenada, +4. Ocurre lo mismo que en el caso anterior: al representar todos estos puntos, se forma la recta $y = 4$, constituida por el conjunto de puntos tales que su ordenada es siempre 4.

CÓDIGO

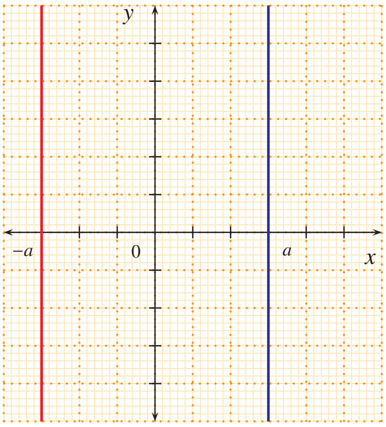
Se trata de descubrir el criterio con el que fueron ubicados los números en las casillas y, una vez hallado, sustituir las letras A, B y C por los valores correspondientes.

	12			
A		B		25
			34	
		43		
51				C

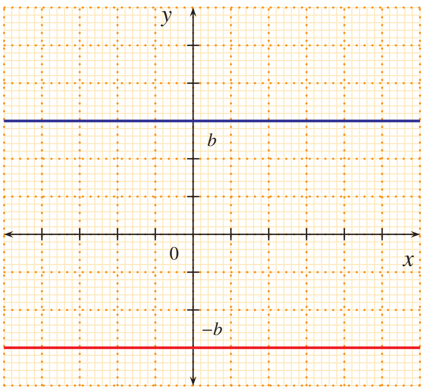
Solución al final del capítulo



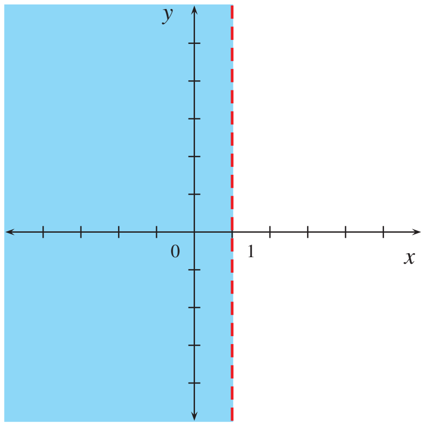
Por tanto, si se pide representar las rectas $x = a$, basta con localizar el punto a en el eje de abscisas y trazar una recta vertical que pase por ese punto.



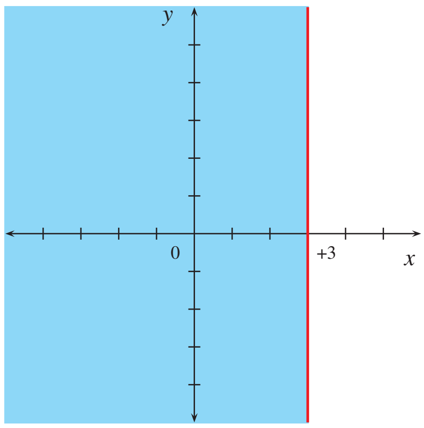
De una manera similar, la recta $y = b$ se representará con facilidad, tras situar en el eje de ordenadas el punto b y trazar una recta horizontal que pase por ese punto.



Supóngase ahora que se fija un punto en el eje de abscisas, por ejemplo $x = 1$, y que se quieren representar los puntos tales que su abscisa x es $x < 1$. Hasta ahora se sabe representar los puntos tales que $x = 1$, formada por la recta vertical que pasa por el punto 1 del eje de abscisas. También se sabe representar $x = 0$, o $x = -1$ o $x = -0,5$, todas ellas rectas con abscisas menores que 1. Así pues, el conjunto de puntos tales que $x < 1$ es el conjunto de puntos representados por todas las rectas antes citadas y por todas las demás rectas verticales cuya abscisa sea menor que 1. Si se representan el conjunto de todas estas rectas, aparece una gráfica como la siguiente:



En este tipo de gráfica, una línea discontinua significa que se consideran sólo los puntos menores que un valor dado, en este caso, los puntos de abscisa menor que 1, por lo que los puntos de la recta de trazos discontinuos no pertenecen a la región señalada. Si se hubiese querido representar, en cambio, el conjunto de puntos tales que $x \leq 3$, la gráfica hubiera sido la siguiente:



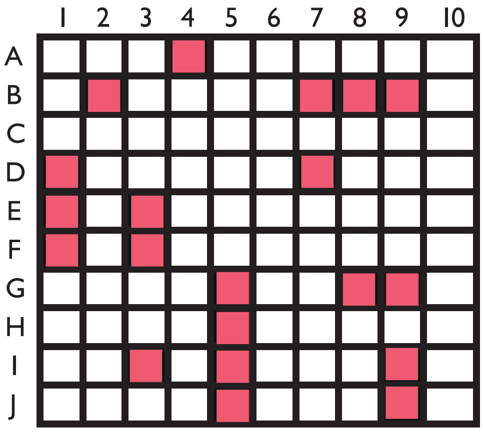
Ahora, la recta $x = 3$ sí que se ha considerado, pues sus puntos, que tienen como abscisa +3, cumplen la condición especificada. Si el conjunto de puntos a representar es $x \geq a$, se hace un razonamiento similar, y se observa que la región pintada, que corresponde al conjunto de puntos representados, queda en todo momento a la derecha de la vertical sobre el punto a en el eje de abscisas.

JUEGO — BATALLA NAVAL

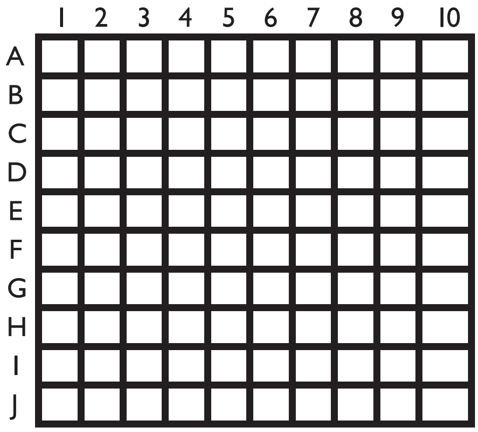
La batalla naval es un juego de estrategia en el que participan dos jugadores. Se juega con lápiz y papel, y no interviene el azar.

Preparación:

Antes de comenzar el juego, cada participante dibuja en un papel cuadriculado dos tableros cuadrados de 10 × 10 casillas. Las filas horizontales se numeran de la A hasta la J, y las columnas verticales del 1 al 10. Basta con indicar las coordenadas de un disparo con un par letra/número (por ejemplo, A6 o J9).



FLOTA PROPIA



DISPAROS

En el cuadrado de la izquierda se coloca la flota propia (se muestra un ejemplo). En el cuadrado de la derecha se irán marcando los disparos que el jugador efectúa en el mar del contrincante: barcos tocados, hundidos y disparos al agua.

La flota:

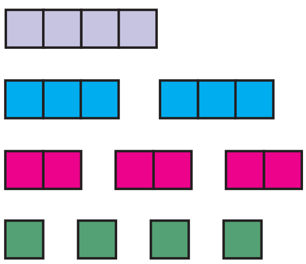
Cada jugador dispone en su tablero izquierdo una flota completa, sin que el contrincante vea su posición. Los barcos no pueden tocarse entre sí, es decir, que todo barco debe estar rodeado de agua o tocar un borde del tablero. La flota esta formada por:

1 portaaviones (de cuatro cuadraditos);

2 acorazados (de tres cuadraditos);

3 buques (de dos cuadraditos);

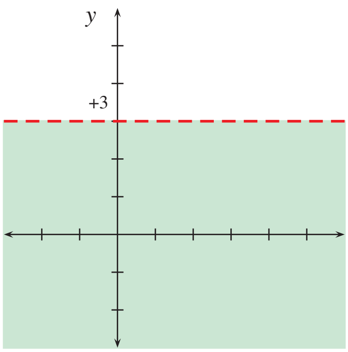
4 submarinos (de un cuadradito).



Mecánica del juego:

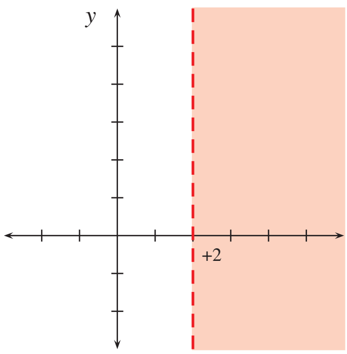
- El turno pasa alternativamente de un jugador a otro.
- En su turno, el jugador hace un disparo a una posición del mar enemigo, indicando la coordenada correspondiente (letra y cifra). Si no hay barcos en ese cuadradito, el otro jugador dice: «¡agua!»; si el disparo ha dado en algún barco dice: «¡tocado!»; si con dicho disparo el rival logra completar todas las posiciones del barco, debe decir «¡hundido!» En el ejemplo, un primer disparo sobre H9 sería «agua»; sobre G5, «tocado», y sobre D7, «hundido».
- Gana el jugador que consigue hundir todos los barcos del rival.

También puede ser interesante representar los conjuntos de puntos tales que, por ejemplo, $y < 3$. Si se piensa como antes, se sabe representar la recta $y = 3$, la recta $y = 2$, o cualquier recta $y = b$, de manera que $b < 3$. Entonces, el conjunto de puntos que representan la región $y < 3$ es la siguiente:

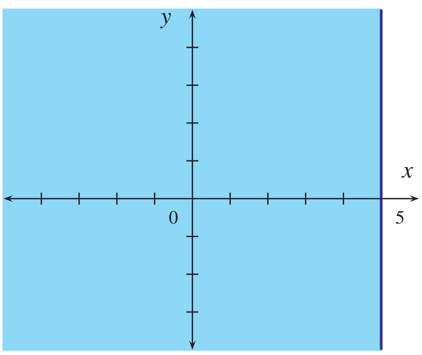


También se sabrán representar los conjuntos de puntos tales que $y > c$, $y \geq d$ o $y \leq e$, donde c, d y e representan números reales.

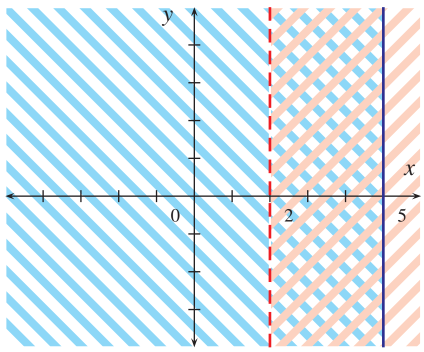
¿Qué aspecto tiene el conjunto de puntos que satisfacen $2 < x \leq 5$? Para empezar, se deben interpretar estas desigualdades por separado. Si se representa $2 < x$ se tiene:



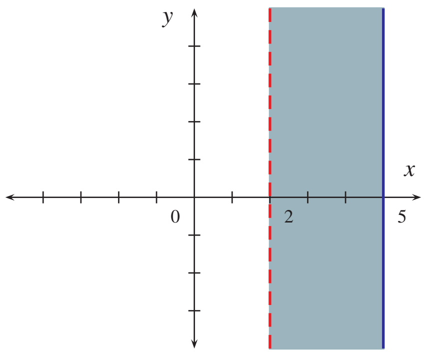
La región correspondiente a $x \leq 5$ se representa en el siguiente gráfico:



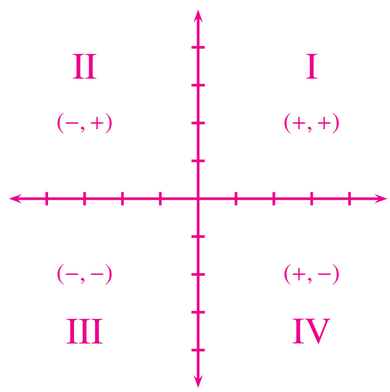
Como tienen que respetarse ambas condiciones a la vez, considérense las dos representaciones juntas:



Así, se concluye que el conjunto de puntos tales que $2 < x \leq 5$ es:



ESQUEMA DE LOS SIGNOS DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS DE UN PUNTO SEGÚN SU CUADRANTE



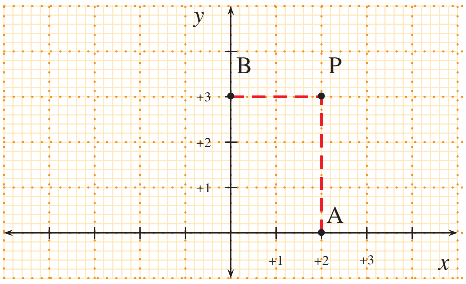
Cuadrante	*Abcisa*	*Ordenada*
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

EL PLANO CARTESIANO

COORDENADAS DE UN PUNTO: EJERCICIOS DE LOCALIZACIÓN DE PUNTOS Y OTRAS ACTIVIDADES EN EL PLANO CARTESIANO

EJERCICIOS COMENTADOS

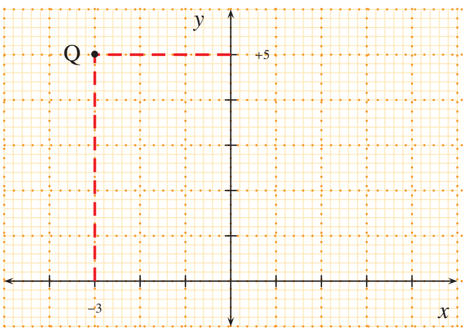
1 **Determinar la abscisa y la ordenada del punto P de la figura:**



Por el punto P del plano pasa una recta paralela a cada uno de los ejes, es decir, una paralela al eje de las *x* y otra al de las *y*. Estas rectas cortan los dos ejes en dos puntos, A y B. Si se consideran las distancias OA y OB, éstas representan la abscisa y la ordenada del punto P. En este caso, P tiene de abscisa +2 y de ordenada +3.

EJERCICIOS RESUELTOS

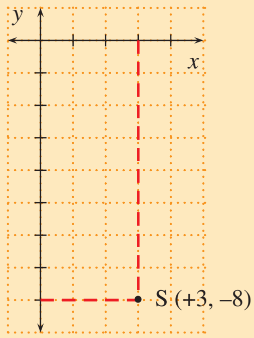
2 Determinar las coordenadas del punto Q del siguiente plano:



Solución: **Q (–3, +5)**

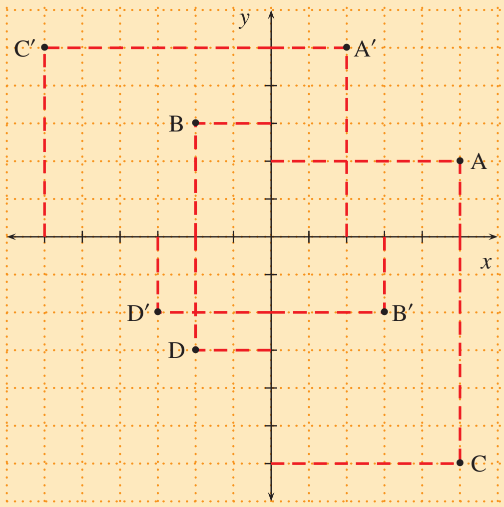
3 Representar el punto S (+3, –8).

Solución:

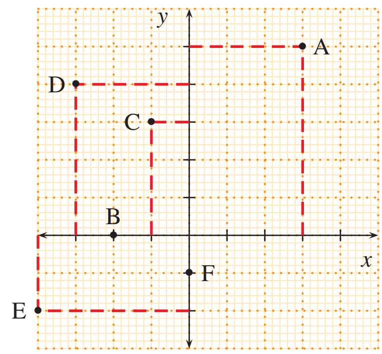


4 Colocar en el plano cartesiano los siguientes puntos: A (+5, +2) y A′ (+2, +5); B (–2, +3) y B′ (+3, –2); C (+5, –6) y C′ (–6, +5) y D (–2, –3) y D′ (–3, –2).

Solución:



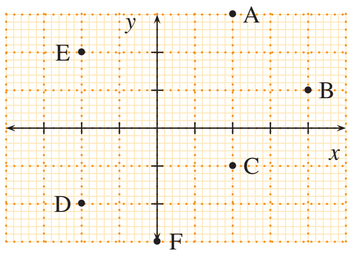
5 Indicar las coordenadas de los siguientes puntos:



Solución: **A (+3, +5); B (–2, 0); C (–1, 3)**
D (–3, 4); E (–4, –2); F (0, –1)

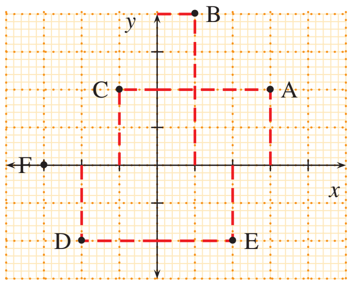
EJERCICIOS COMENTADOS

6 **Obsérvese la siguiente representación gráfica:**

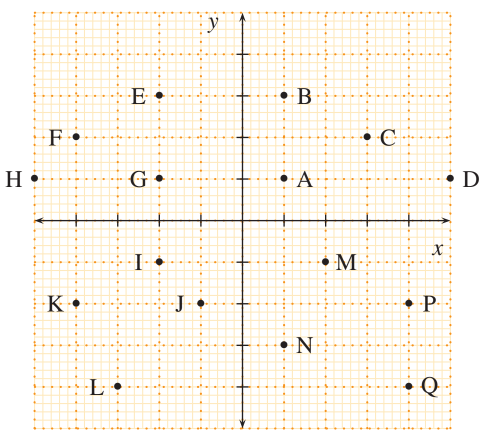


Indicar las coordenadas de los puntos marcados. Cambiar el orden de los números en cada par ordenado y representarlos.

Las coordenadas de los puntos que hay marcados son A (+2, +3), B (+4, +1), C (+2, –1), D (–2, –2), E (–2, 2) y F (0,–3). Si se cambia el orden de los números en cada par ordenado, resulta A (+3, +2), B (+1, +4), C (–1, +2), D (–2, –2), E (2, – 2) y F (–3, 0), y sus posiciones en el plano cartesiano son:



7 **Obsérvese la siguiente figura:**



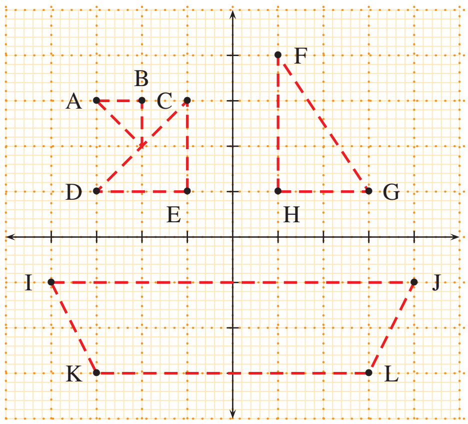
En primer lugar, escribir las coordenadas de los puntos que se encuentran en el primer cuadrante; luego, las de los puntos situados en el segundo cuadrante. Hacer lo mismo con el tercer y el cuarto cuadrante. Finalmente, indicar qué signo tienen las coordenadas de los puntos que pertenecen a cada cuadrante.

Los puntos que se encuentran en el primer cuadrante son A (+1, +1), B (+1, +3), C (+3, +2) y D (+5, +1). Los del segundo cuadrante son E (–2, +3), F (–4, +2), G (–2, +1) y H (–5, +1). Los puntos dibujados en el tercer cuadrante son I (–2, –1), J (–1, –2), K (–4, –2) y L (–3, –4). Finalmente, los que se encuentran en el último cuadrante son M (+2, –1), N (+1, –3), P (+4, –2) y Q (+4, –4).

Se observa que los puntos del primer cuadrante tienen ambas coordenadas con signo positivo; los del segundo, tienen la primera abscisa negativa y la ordenada positiva; los del tercero, tienen ambas coordenadas negativas, y los puntos que se encuentran en el cuarto y último cuadrante tienen la abscisa positiva y la ordenada negativa.

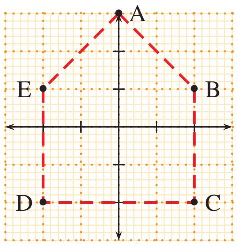
EJERCICIOS RESUELTOS

8 Indicar las coordenadas de los puntos marcados en negro en el siguiente dibujo.



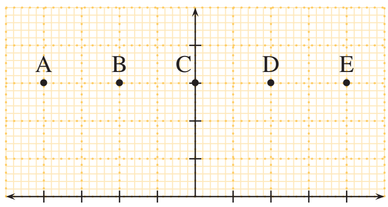
Solución: **A (–3, +3); B (–2, +3); C (–1, +3)**
D (–3, +1); E (–1, +1); F (+1, +4)
G (+3, +1); H (+1, +1); I (–4, –1)
J (+4, –1); K (–3, –3); L (+3, –3)

9 Dar las coordenadas de los puntos señalados en el siguiente gráfico.



Solución: **A (0, +3); B (+2, +1); C (+2, –2)**
D (–2, –2); E (–2, +1)

10 **Observar los puntos representados:**



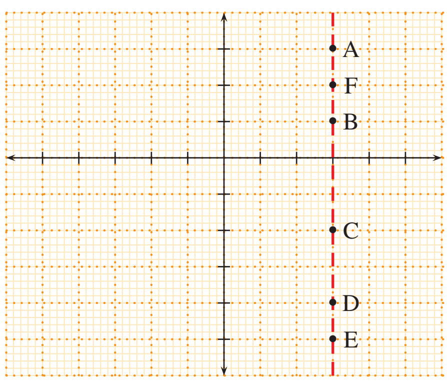
Escribir las coordenadas de los puntos. ¿Qué particularidad tienen?

Solución: **(–4, +3); B (–2, +3); C (0, +3)**
D (+2, +3); E (+4, +3)
Todos estos puntos tienen la segunda coordenada igual, es decir, la ordenada es la misma para todos ellos, e igual a 3

REPRESENTACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO DE REGIONES Y CONJUNTOS DE PUNTOS QUE SATISFACEN CONDICIONES ALGEBRAICAS SENCILLAS

EJERCICIOS COMENTADOS

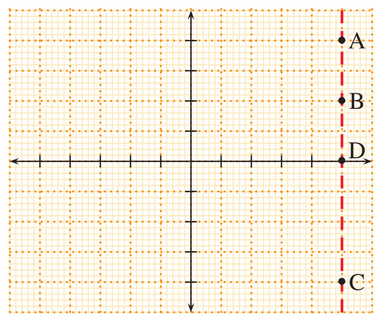
11 **¿Qué abscisa tienen todos los puntos marcados sobre la siguiente recta? ¿Qué conclusión se puede deducir?**



Todos los puntos marcados sobre la recta vertical tienen abscisa 3. Como conclusión, se puede deducir que todos los puntos de una recta vertical tienen la misma abscisa, mientras que su ordenada varía de uno a otro.

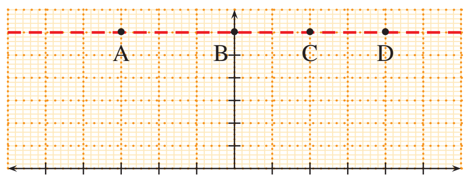
EJERCICIOS RESUELTOS

12 Identificar las coordenadas de los puntos marcados sobre la siguiente recta:



Solución: **A (+5, +4); B (+5, +2)**
C (+5, –4); D (+5,0)
Todos los puntos tienen la misma abscisa, +5, mientras que la ordenada es diferente entre ellos

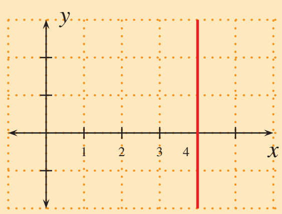
13 Hallar las coordenadas de los puntos marcados en la siguiente recta horizontal.



Solución: **A (–3, +6); B (0, +6)**
C (+2, +6); D (+4, +6)

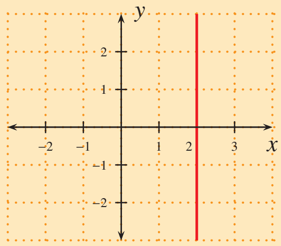
14 Dibujar todos los puntos que tienen abscisa 4.

Solución: **Hay infinitos, son los que forman la siguiente recta:**



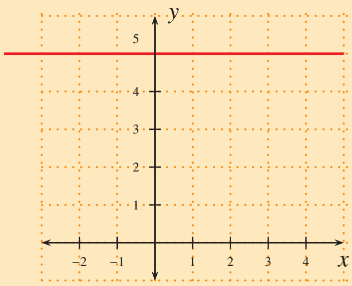
15 Trazar la recta $x = 2$.

Solución:



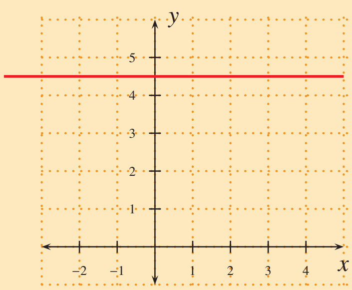
16 Representar la recta cuyos puntos tienen todos ordenada 5.

Solución:



17 Representar en el siguiente plano cartesiano la recta $y = 4{,}5$.

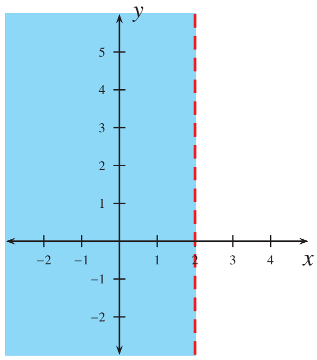
Solución:



EJERCICIOS COMENTADOS

18 Colorear en el plano cartesiano la región del conjunto de puntos que satisfacen que su abscisa es menor que 2.

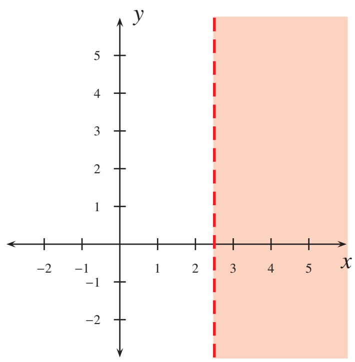
El conjunto de puntos que tienen su abscisa menor que 2 es el conjunto de puntos del plano cartesiano tales que $x < 2$. La recta $x = 2$ es una vertical que pasa por el punto 2 del eje de abscisas, y toda recta vertical que se encuentre a su izquierda tendrá su abscisa menor que 2. Si se representan todas estas líneas con un mismo color, el resultado es un semiplano:



Como los puntos de la recta $x = 2$ no cumplen la desigualdad estricta $x < 2$, es la primera que no está representada, y se indica mediante su dibujo en forma de línea de trazos discontinuos.

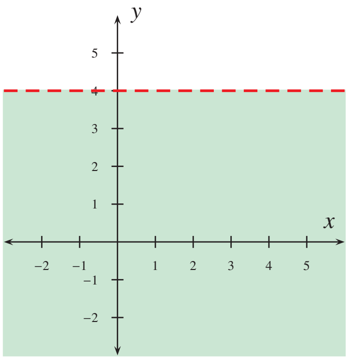
19 Representar el conjunto de puntos tales que tienen su abscisa mayor que 2,5. Colorear la región indicada.

Lo que pide el enunciado es equivalente a colorear la región del plano que contiene todos los puntos tales que su primera coordenada, es decir, la x, satisface que $x > 2{,}5$. Localizado este valor en el eje horizontal y trazada una línea discontinua vertical que pasa por él, se colorea el semiplano que determina a su derecha:



20 Colorear la región determinada por los puntos que tienen su ordenada menor que 4.

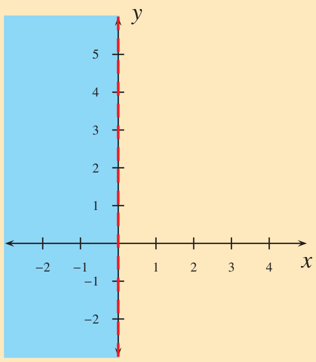
Los puntos solicitados en este ejercicio son aquellos tales que $y < 4$. Para dibujar esta región, se empieza por representar la recta $y = 4$, es decir, la recta horizontal que pasa por el punto 4 del eje de las y; como sus puntos no cumplen la condición de ser menores que 4, se debe formar con trazos discontinuos. Del mismo modo, pero con líneas continuas, se trazaría el conjunto de rectas horizontales que pasan por puntos reales del eje de ordenadas menores que 4, como 3,9, 3,7, 3, 2,5, etc. La representación de todas ellas es la imagen deseada:



EJERCICIOS RESUELTOS

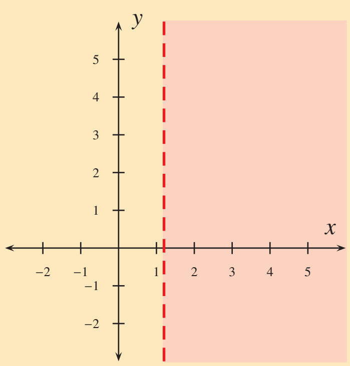
21 Colorear la región del plano determinada por los puntos que satisfacen $x \leq 0$.

Solución:



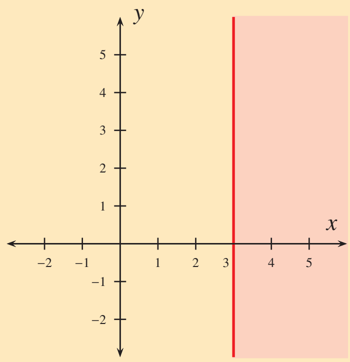
22 Señalar el conjunto de puntos del plano tales que $x > 1{,}2$ y colorear la región que determinan:

Solución:



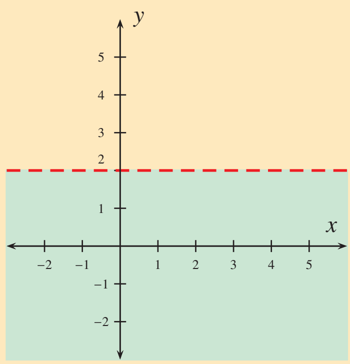
23 Colorear la región del plano definida por los puntos que satisfacen la condición $x \geq 3$.

Solución:



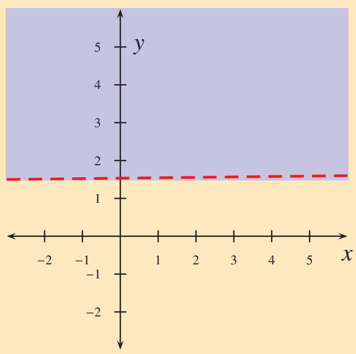
24 Representar en el plano el conjunto de puntos que satisfacen $y < 2$.

Solución:



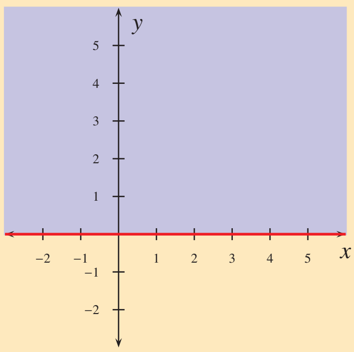
25 Marcar en un gráfico el área ocupada por los puntos con ordenada mayor que 1,5.

Solución:



26 Representar y colorear la siguiente región del plano delimitada por la expresión $y \geq 0$.

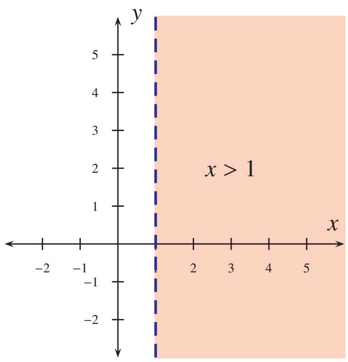
Solución:

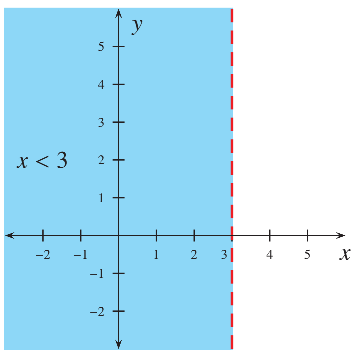


EJERCICIOS COMENTADOS

27 Dibujar y colorear la siguiente franja en el plano cartesiano: $1 < x < 3$.

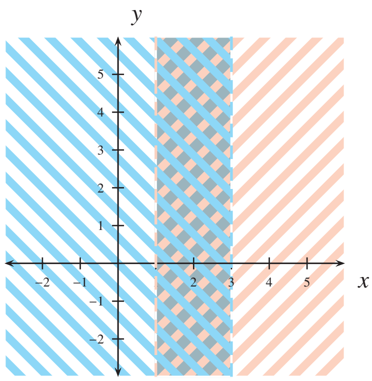
En primer lugar, se representan las regiones $1 < x$ (o lo que es lo mismo, $x > 1$), y $x < 3$:





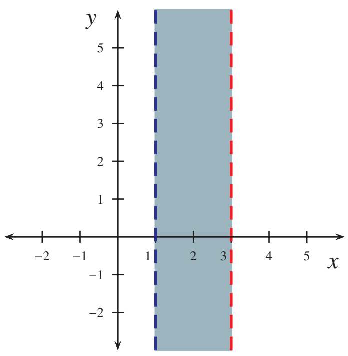
Una vez representadas las dos situaciones, la que interesa es la intersección entre ambas, es decir, los puntos que se encuentran en las dos regiones a la vez.

Para identificarlos, lo más fácil es dibujar ambas regiones sobre el mismo plano cartesiano:



Una vez hecho, se observa que la región que coincide y por tanto, la requerida en el ejercicio, es la que aparece a continuación:

$1 < x < 3$

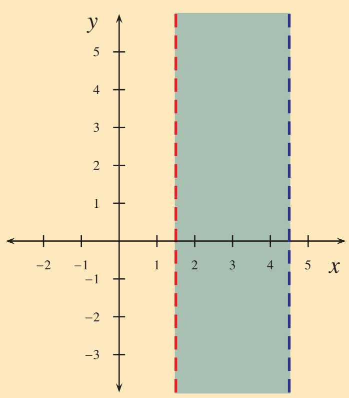


EJERCICIOS RESUELTOS

28 Representar la siguiente región en el plano cartesiano: $1,5 < x < 4,5$.

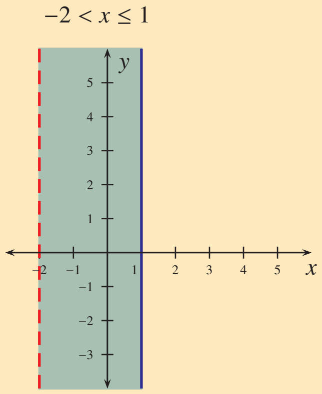
Solución:

$1,5 < x < 4,5$



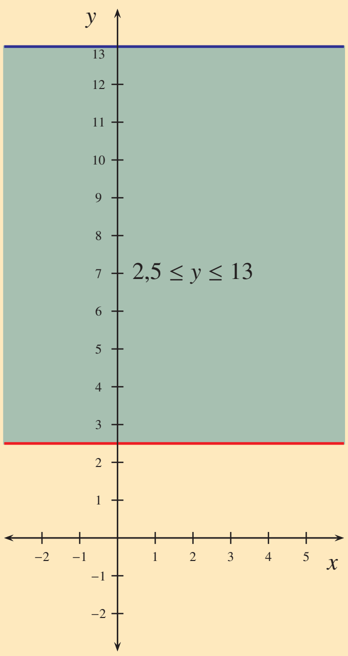
29 Marcar los puntos del plano cartesiano que determinan la expresión $-2 < x \leq 1$.

Solución:



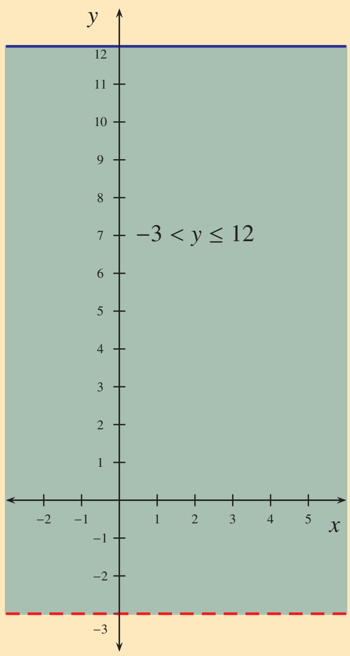
30 Marcar en los cuadrantes de un sistema cartesiano el área que corresponde a los puntos definidos por la expresión $2{,}5 \leq y \leq 13$.

Solución:



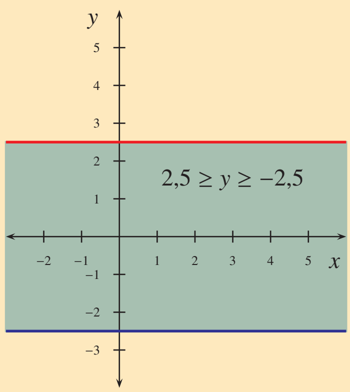
31 Representar la región del plano comprendida por los puntos que cumplen que $-3 < y \leq 12$.

Solución:



32 Colorear la superficie determinada por la región cuyos puntos cumplen la condición $2{,}5 \geq y \geq -2{,}5$.

Solución:



SOLUCIÓN A LOS ENIGMAS MATEMÁTICOS

CÓDIGO (pág. 242): Las filas se numeran del 1 al 5 de arriba abajo, y las columnas, de izquierda a derecha. A cada casilla le corresponde un número formado por dos dígitos: el primero indica la fila y el segundo, la columna. Así pues, A = 21, B = 23 y C = 55.