CAPÍTULO 18

SIMULTANEIDAD: ASPECTOS PRELIMINARES

18.1. **Modelos de ecuaciones simultáneas**

Hasta este momento hemos trabajado con modelos uniecuacionales, y hemos encontrado que los mínimos cuadrados son un principio atractivo para la estimación de los parámetros. En algunas ocasiones el principio de mínimos cuadrados genera estimadores óptimos y en otras no, pero de forma casi invariable, el principio de los mínimos cuadrados genera estimadores consistentes. Sin embargo, la teoría económica postula a menudo un *conjunto de ecuaciones* en las que varias variables son *conjuntamente dependientes*. Al pasar a modelos multiecuacionales encontraremos que los mínimos cuadrados pueden ser un principio de estimación completamente inaceptable.

La clave de este resultado radica en que en el modelo de ecuaciones simultáneas típico los parámetros en los que los economistas están interesados no son los coeficientes de la función de esperanza condicional en la población, ni siquiera los coeficientes del predictor lineal óptimo. *Precisamente como los mínimos cuadrados están diseñados para estimar funciones de esperanza condicional o predictores lineales óptimos, los mínimos cuadrados son inapropiados cuando queremos estimar alguna otra característica de una población*. Ilustraremos el argumento con dos sencillos modelos económicos, después de hacer un par de puntualizaciones.

En primer lugar, una llamada de atención. Suponga que escribe la ecuación

$$Y = \alpha + \beta X + U \tag{18.1}$$

donde la *parte sistemática* es $\alpha + \beta X$ y la *perturbación* es U. Si supone que $E(U|X) = 0$ para todo X, entonces está afirmando que $E(Y\,|\,X) = \alpha + \beta X$: la parte sistemática de la ecuación (18.1) es la esperanza condicional de Y dado X. De forma alternativa, si supone solamente que $E(U) = 0$ y que $C(X, U) = 0$, entonces está afirmando que $PLO\ (Y\,|\,X) = \alpha + \beta X$: la parte sistemática es el predictor lineal óptimo de Y dado X. (Recordemos del capítulo 4 que esas dos condiciones de primer orden son equivalentes a $\beta = C(X, Y)/V(X)$ y $\alpha = E(Y) - \beta E(X)$). Sin embargo, si no supone nada acerca del término de perturbación en (18.1), o tan sólo supone que $E(U) = 0$, entonces no hay base para dar por supuesto que la parte sistemática es una función de esperanza condicional o siquiera un predictor lineal óptimo. Como veremos, esta situación aparece de forma natural en modelos de ecuaciones simultáneas.

En segundo lugar, una sugerencia. Sabemos que si la función de esperanza condicional es lineal, entonces coincide con el predictor lineal óptimo. Aunque nos referiremos a «predictores lineales óptimos», bien pueden interpretarse como «funciones de esperanza condicional», lo que es por supuesto legítimo si las funciones de esperanza condicional son lineales, y aporta más intuición en cualquier caso.

18.2. **Un modelo de oferta y demanda**

Un modelo microeconómico determinístico muy familiar viene dado por

$$\text{Oferta:} \quad Q = \alpha_1 + \alpha_2 P \tag{18.2}$$

$$\text{Demanda:} \quad Q = \alpha_3 + \alpha_4 P \tag{18.3}$$

donde $Q =$ cantidad y $P =$ precio. Se presupone que $\alpha_2 > 0$ (la curva de oferta tiene pendiente positiva) y que $\alpha_4 < 0$ (la curva de demanda tiene pendiente negativa). Este modelo trata de describir cómo se determinan el precio y la cantidad de equilibrio en el mercado de un bien particular. Despejando Q y P, se obtiene

$$\text{Cantidad:} \quad Q = (\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4)/(\alpha_2 - \alpha_4) = \pi_1, \quad \text{digamos} \tag{18.4}$$

$$\text{Precio:} \quad P = (\alpha_3 - \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_4) = \pi_2, \quad \text{digamos.} \tag{18.5}$$

Para que el modelo sea aplicable al mundo real, donde las relaciones entre variables casi nunca son exactas, el modelo debe modificarse para permitir desviaciones respecto a las funciones de oferta y demanda determinísticas. La versión probabilística más natural del modelo tiene la *forma estructural*

$$\text{Oferta:} \quad Q = \alpha_1 + \alpha_2 P + U_1 \tag{18.6}$$

$$\text{Demanda:} \quad Q = \alpha_3 + \alpha_4 P + U_2, \tag{18.7}$$

donde el *shock o perturbación de oferta* U_1 y el *shock o perturbación de demanda* U_2 son variables aleatorias con

$$\begin{gathered} E(U_1) = 0, \quad V(U_1) = \sigma_1^2, \quad E(U_2) = 0, \\ V(U_2) = \sigma_2^2, \quad C(U_1, U_2) = 0. \end{gathered} \tag{18.8}$$

Aunque el supuesto de covarianza cero $C(U_1, U_2) = 0$ no es crucial, lo aplicaremos aquí para reducir el uso del álgebra.

Para hallar la cantidad y el precio que prevalecerán para unas realizaciones de U_1 y U_2, resolvamos (18.6) y (18.7). Denotando $\Delta = \alpha_2 - \alpha_4$ y despejando Q y P se obtiene la *forma reducida* del modelo

$$Q = (\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4)/\Delta + (\alpha_2 U_2 - \alpha_4 U_1)/\Delta = \pi_1 + V_1, \text{ digamos} \quad (18.9)$$

$$P = (\alpha_3 - \alpha_1)/\Delta + (U_2 - U_1)/\Delta = \pi_2 + V_2, \text{ digamos,} \quad (18.10)$$

que es la versión probabilística de (18.4) y (18.5). Empleando (18.8) y las reglas para funciones lineales, deducimos que las *perturbaciones de la forma reducida* V_1 y V_2 tienen las siguientes esperanzas, varianzas y covarianza:

$$\begin{aligned} E(V_1) = 0, \quad & V(V_1) = (\alpha_2^2\,\sigma_2^2 + \alpha_4^2\,\sigma_1^2)\,/\Delta^2, \\ E(V_2) = 0, \quad & V(V_2) = (\sigma_2^2 + \sigma_1^2)\,/\Delta^2, \\ & C(V_1, V_2) = (\alpha_2\,\sigma_2^2 + \alpha_4\,\sigma_1^2)\,/\Delta^2. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Considerando conjuntamente las expresiones (18.9)-(18.11) obtenemos una descripción parcial de la distribución de probabilidad bivariante de Q y P. En concreto, sus esperanzas, varianzas y covarianza son

$$\begin{aligned} E(Q) = \pi_1, \quad E(P) = \pi_2, \quad V(Q) = V(V_1), \\ V(P) = V(V_2), \quad C(Q,P) = C(V_1, V_2). \end{aligned} \quad (18.12)$$

Podemos plantearnos ahora la pregunta siguiente: ¿cuál es el predictor lineal óptimo de Q dado P? De nuestra teoría anterior (capítulo 4) sobre poblaciones bivariantes, sabemos que el predictor lineal óptimo de Q dado P es

$$PLO(Q|P) = \theta_0 + \theta_1 P, \quad (18.13)$$

donde

$$\theta_1 = C(Q,P)/V(P), \quad \theta_0 = E(Q) - \theta_1 E(P). \quad (18.14)$$

Sustituyendo en las esperanzas, varianza y covarianza relevantes, deducimos que en este modelo de oferta y demanda la pendiente y el término constante del predictor lineal óptimo de la cantidad dado el precio son

$$\theta_1 = \omega\alpha_2 + (1-\omega)\alpha_4, \quad \theta_0 = \omega\alpha_1 + (1-\omega)\alpha_3, \quad (18.15)$$

donde $\omega = \sigma_2^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

El resultado principal es que la recta $PLO\ (Q|P)$ difiere tanto de la parte sistemática de la función de oferta como de la parte sistemática de la función de demanda. Como se resaltó anteriormente, el mero hecho de que (18.6) y (18.7) sean ecuaciones lineales con sus correspondientes perturbaciones no significa que sus partes sistemáticas sean los predictores lineales óptimos de las variables que figuran en el lado izquierdo de las ecuaciones del modelo.

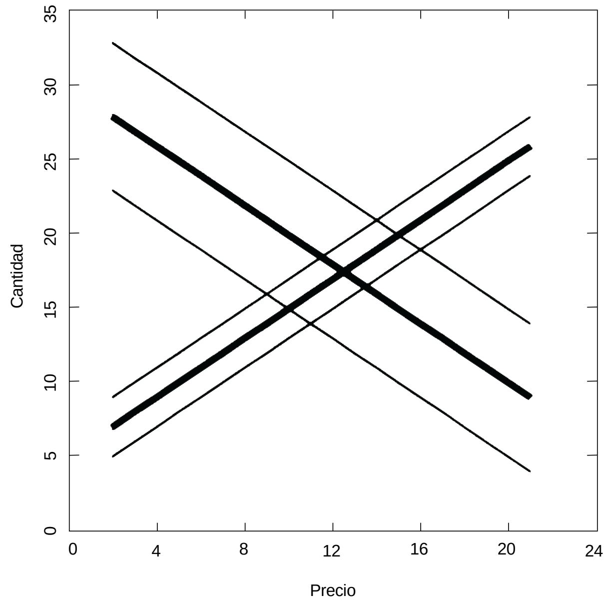

FIG. 18.1. *Oferta y demanda.*

La figura 18.1 puede clarificar esta situación. Las líneas gruesas representan las funciones de oferta y demanda con U_1 y U_2 iguales a cero. Las líneas finas representan desplazamientos hacia arriba y hacia abajo de dichas funciones debido a realizaciones positivas y negativas de los shocks. Por tanto, los nueve puntos de corte representan equilibrios que pueden tener lugar en la población. Si visualiza la recta que mejor ajustaría esos nueve puntos, está claro que no se correspondería con ninguna de las otras líneas.

18.3. **Un modelo keynesiano**

Un modelo macroeconómico determinístico muy familiar viene dado por

$$\text{Demanda de consumo:} \quad C = \alpha + \beta Y \tag{18.16}$$

$$\text{Equilibrio:} \quad Y = C + I \tag{18.17}$$

donde C (= consumo) e Y (= producción = renta) son *endógenas* (esto es, determinadas por el modelo), mientras que I (= inversión) es *exógena* (esto es, determinada fuera del modelo). Se presupone que la propensión marginal a consumir, β, está entre 0 y 1. Este modelo trata de describir cómo la demanda agregada genera los niveles de producción y de consumo. Despejando C e Y obtenemos,

$$\begin{aligned} \text{Consumo:} \quad C &= \alpha/(1-\beta) + [\beta/(1-\beta)]\, I \\ &= \pi_0 \qquad\qquad + \pi_1 I, \quad \text{digamos} \end{aligned} \tag{18.18}$$

$$\begin{aligned} \text{Producción:} \quad Y &= \alpha/(1-\beta) + [1/(1-\beta)]\, I \\ &= \pi_0 \qquad\qquad + \pi_2 I, \quad \text{digamos.} \end{aligned} \tag{18.19}$$

Para que se corresponda con el mundo real, donde las relaciones entre variables observables no son exactas casi nunca, el modelo debe permitir alguna desviación respecto a la demanda determinística. La versión probabilística más natural del modelo tiene la forma estructural:

$$\text{Demanda de consumo:} \quad C = \alpha + \beta Y + U \tag{18.20}$$

$$\text{Equilibrio:} \quad Y = C + I, \tag{18.21}$$

donde el *shock de consumo* U y la variable exógena I son variables aleatorias con

$$\begin{gathered} E(U) = 0, \quad V(U) = \sigma_U^2, \quad E(I) = \mu, \\ V(I) = \sigma_I^2, \quad C(U, I) = 0. \end{gathered} \tag{18.22}$$

A la condición de equilibrio no se le añade perturbación alguna, porque es una identidad contable de la contabilidad nacional de esta sencilla economía, que se satisface de manera exacta. Por otro lado, veremos más adelante que el supuesto de covarianza cero $C(U, I) = 0$ *es* crucial en este modelo.

Para hallar el nivel de consumo y renta que prevalecerán dadas unas realizaciones de U e I, despejamos en (18.20)-(18.21). Definiendo $\Delta = 1 - \beta$ y despejando C e Y obtenemos la forma reducida

$$\begin{aligned} \text{Consumo:} \quad C &= \alpha/\Delta + (\beta/\Delta)I + (1/\Delta)U \\ &= \pi_0 \quad + \pi_1 \qquad + V, \quad \text{digamos} \end{aligned} \tag{18.23}$$

$$\begin{aligned} \text{Producción:} \quad Y &= \alpha/\Delta + (1/\Delta)I + (1/\Delta)U \\ &= \pi_0 \quad + \pi_2 \qquad + V, \quad \text{digamos,} \end{aligned} \tag{18.24}$$

que es la versión estocástica de (18.18)-(18.19). Aplicando (18.22) y las reglas para funciones lineales, deducimos que la perturbación común V de la forma reducida verifica

$$E(V) = 0, \quad V(V) = \sigma_U^2/\Delta^2, \quad C(V, I) = 0. \tag{18.25}$$

Tomando (18.23)-(18.25) conjuntamente, obtenemos una descripción parcial de la distribución de probabilidad bivariante de C e Y. En concreto, sus esperanzas, varianzas y covarianza son

$$\begin{aligned} E(C) &= \pi_0 + \pi_1\mu = (\alpha + \beta\,\mu)/\Delta \\ E(Y) &= \pi_0 + \pi_2\mu = (\alpha + \quad \mu)/\Delta \\ V(C) &= \quad \pi_1^2\,\sigma_I^2 + \sigma_V^2 = (\beta^2\,\sigma_I^2 + \sigma_U^2)/\Delta^2 \\ V(Y) &= \quad \pi_2^2\,\sigma_I^2 + \sigma_V^2 = \quad (\sigma_I^2 + \sigma_U^2)/\Delta^2 \\ C(C,Y) &= \pi_1\pi_2\sigma_I^2 + \sigma_V^2 = \ (\beta\sigma_I^2 + \sigma_U^2)/\Delta^2 \end{aligned} \tag{18.26}$$

Ahora podemos plantear la pregunta: ¿Cuál es la función de esperanza condicional de C dado Y, o al menos el predictor lineal óptimo de C dado Y? Por la teoría que hemos visto anteriormente, sabemos que el predictor lineal óptimo de C dado Y es

$$PLO(C|Y) = \theta_0 + \theta_1 Y, \tag{18.27}$$

donde

$$\theta_1 = C(C,Y)/V(Y), \qquad \theta_0 = E(C) - \theta_1 E(Y). \tag{18.28}$$

Sustituyendo en las esperanzas, varianzas y covarianzas relevantes, y definiendo

$$\omega = \sigma_I^2/(\sigma_I^2 + \sigma_U^2),$$

deducimos que, en este modelo keynesiano, la pendiente y el término constante del predictor lineal óptimo del consumo dada la renta son

$$\theta_1 = \omega\beta + (1-\omega)1, \qquad \theta_0 = \omega\alpha - (1-\omega)\mu. \tag{18.29}$$

El resultado principal es que la recta $PLO\ (C|Y)$ difiere de la parte sistemática de la función de consumo. El mero hecho de que la función estructural de consumo sea $C = \alpha + \beta X + U$ con $E(U) = 0$ no significa que la parte sistemática, $\alpha + \beta X$, sea el predictor lineal óptimo de C dado Y en este modelo.

18.4. **Estimación**

En nuestros dos ejemplos, la parte sistemática de cada ecuación estructural no era el predictor lineal óptimo de la variable del lado izquierdo dada la variable del lado derecho. Imagine que obtenemos observaciones por muestreo aleatorio y que realizamos la regresión lineal mínimo-cuadrática de Q sobre P en el modelo de oferta y demanda, o de C sobre Y en el modelo keynesiano. ¿Obtendríamos estimaciones consistentes de la ecuación de oferta (o demanda), o de la ecuación de consumo? Ciertamente, no: lo que obtendríamos sería estimaciones consistentes de $PLO\ (Q|P)$ o de $PLO\ (C|Y)$. A fin de cuentas, en el capítulo 13 vimos que bajo muestreo aleatorio de cualquier población, la regresión lineal mínimo-cuadrática estima consistentemente el predictor lineal óptimo poblacional.

En esta situación, se suele afirmar que los mínimos cuadrados proporcionan estimaciones sesgadas e inconsistentes de los parámetros en el típico modelo de ecuaciones simultáneas. Pero resulta más instructivo afirmar que aplicar mínimos cuadrados a las ecuaciones estructurales proporciona estimaciones que son consistentes, pero para los parámetros equivocados.

En contraste con todo esto, la parte sistemática de cada ecuación de forma reducida *era* el predictor lineal óptimo de la variable del lado izquierdo dada la variable del lado derecho. Por ejemplo, en el modelo keynesiano, aplicando (18.25) en (18.23) encontramos que $PLO\ (C|I) = \pi_0 + \pi_1 I$. Por tanto, bajo muestreo aleatorio, la regresión muestral mínimo-cuadrática de C sobre I estimará consistentemente π_0 y π_1. Explotemos ahora la relación entre los parámetros de la forma reducida y los parámetros estructurales. Concentrándonos en la pendiente, sabemos que

$$\pi_1 = \beta/\Delta = \beta/(1-\beta), \tag{18.30}$$

lo que significa que

$$\beta = \pi_1/(1+\pi_1). \tag{18.31}$$

Si insertamos un estimador consistente de π_1 en el lado derecho, obtendremos un estimador consistente de β en el lado izquierdo: véase el teorema de Slutsky en el capítulo 13.

Queda ver si este método de *mínimos cuadrados indirectos* es siempre aplicable y, en caso afirmativo, si es el mejor método de estimación disponible. La denominación «mínimos cuadrados indirectos» se refiere al hecho de que al aplicar mínimos cuadrados a la forma reducida y recuperar después las estimaciones estamos utilizando indirectamente los mínimos cuadrados en la forma estructural.

18.5. **Interpretación**

Aunque nos hemos referido al parámetro β como la «propensión marginal a consumir», ahora parece que β en nuestro modelo keynesiano no proporciona el cambio esperado en el consumo asociado con un cambio unitario en la renta. Porque dicho cambio esperado está dado por θ_1, la pendiente del predictor lineal óptimo del consumo dado la renta. Esto lleva a preguntarse qué significa β en el modelo keynesiano. Para investigar este asunto, es útil reescribir el modelo estructural como

$$C = \alpha + \beta Y + U \tag{18.32}$$

$$C = \qquad Y - I. \tag{18.33}$$

A partir de (18.32) parece claro que β, que debe estar entre 0 y 1, mide el cambio en el consumo asociado a un cambio unitario en la renta, manteniéndose U constante, mientras que a partir de (18.33) parece claro que 1 es el cambio en el consumo asociado a un cambio unitario en la producción, manteniéndose I constante. Por tanto, si nos interesa predecir la respuesta del consumo ante un cambio en la renta (que es igual a la producción) en uno de esos casos polares, presentaríamos los valores β y 1, respectivamente. Pero de hecho, de acuerdo con el modelo, cada observación viene generada para una realización distinta del par (I, U), lo que obviamente significa que no va a cumplirse la constancia de U o de I. En la población, ambos componentes de (I, U) varían, por lo que generarán cambios en ambos componentes de (C, Y). De forma heurística, deberíamos anticipar que el cambio observado en C relativo a un cambio observado en Y tenderá en media a β si los cambios de I predominan respecto a los cambios en U, mientras que tenderá en media a 1 si los cambios de U predominan respecto a los cambios en I. La fuente de cambio que domina viene indicada por las varianzas de I y de U. Y de hecho, la expresión para θ_1 en (18.29), que es $\theta_1 = \omega\beta - (1-\omega)1$, es una media ponderada de β y 1, donde los pesos relativos coinciden con las varianzas relativas de las dos variables.

Otra manera informativa de interpretar la función estructural de consumo es que sirve para evaluar ciertos cambios en el modelo económico. Suponga, por ejemplo, que una autoridad política decidiera fijar el nivel de producción (en el de pleno empleo, por ejemplo) pero que los consumidores siguen sus propios intereses y la inversión queda determinada como un residuo (renta no consumida). En la nueva economía, Y sería exógena e I sería endógena; el predictor óptimo de un incremento del consumo dado un incremento unitario en la renta sería β más que θ_1.

Un análisis similar se aplica al modelo de oferta y demanda. El cambio predicho en la cantidad dado un cambio unitario en el precio en el modelo económico viene dado por θ_1 en (18.15), que es una media ponderada de la pendiente de la oferta α_2 y de la pendiente de la demanda α_4. Los pesos relativos corresponden a las varianzas relativas del shock de demanda U_2 y del shock de oferta U_1. Si, por un lado, el cambio observado en el precio fuese enteramente resultado de un shock de demanda, entonces el cambio observado en la cantidad se ubicaría a lo largo de la curva de oferta. Si, por otro lado, el cambio observado en el precio fuese enteramente resultado de un shock de oferta, entonces el cambio observado en la cantidad se ubicaría a lo largo de la curva de demanda. Tal y como está planteado el modelo, ambos shocks cambian de observación a observación, y sus varianzas relativas indican cuál domina. Además, las funciones estructurales de oferta y demanda sirven para analizar separadamente cambios en el modelo económico. Por ejemplo, si una innovación tecnológica cambiara la función de oferta, los consumidores seguirían manteniendo la misma función de demanda, pero el predictor lineal óptimo de Q dado P ya no tendría pendiente igual a θ_1.

En estas interpretaciones y estos análisis subyace el interés de los economistas por los parámetros de la forma estructural, en contraposición a los parámetros de la forma reducida, así como a los parámetros del predictor lineal óptimo de una variable endógena dada otra. Incluso aunque estemos interesados tan sólo en predicción, en la medida en que estemos interesados también en hacer predicciones sobre poblaciones distintas de aquella de la que proceden nuestros datos nos hará falta aislar los parámetros estructurales. Este interés ya es muy evidente en los cursos de introducción a la microeconomía. ¿Por qué el profesor se toma la molestia de analizar la determinación de precio y cantidad para distintas funciones de demanda y oferta, en vez de analizarlo directamente en términos de todas las variables exógenas (renta, precios de los inputs, precios de los sustitutos) que afectan al mercado? La razón es que desea estudiar lo que sucede cuando los consumidores cambian su comportamiento y los productores no lo hacen, y viceversa. Su justificación es que son este tipo de cambios los que tienen lugar en el mundo real.

Ejercicios

18.1. En el modelo de oferta y demanda, verifique (18.15). Derive después el *PLO* $(P|Q)$ y exprese su pendiente como una combinación ponderada de los parámetros estructurales.

18.2. En el modelo keynesiano, verifique (18.29). Derive después *PLO* $(Y|C)$ y exprese su pendiente como una combinación ponderada de parámetros estructurales.

18.3. Si se modifica el modelo de oferta y demanda para permitir que $C(U_1, U_2)$ en (18.8) sea distinta de cero, ¿cómo afectaría esto a los resultados posteriores?

18.4. En el modelo keynesiano, muestre que $\pi_1 = C(I, C)/V(I)$ y que $1 + \pi_1 = C(I, Y)/V(I)$, de manera que $\beta = \pi_1/(1 + \pi_1) = C(I, C)/C(I, Y)$. Esto indica que la pendiente estructural es en este caso un cociente de covarianzas poblacionales, y no el cociente de una covarianza poblacional entre una varianza poblacional, como corresponde a las pendientes de los predictores lineales óptimos.

CAPÍTULO 19

MODELOS DE OFERTA Y DEMANDA

19.1. **Introducción**

Los dos ejemplos del capítulo 18 sirven para ilustrar las cuestiones estadísticas que aparecen en los modelos de ecuaciones simultáneas. Pero esos ejemplos eran especiales: cada uno tenía solamente dos ecuaciones, el modelo de oferta-demanda no tenía variables exógenas (excepto la constante), y el modelo keynesiano tenía únicamente una perturbación. Aunque nos concentremos en modelos con dos ecuaciones, necesitamos un ejemplo más elaborado para poder estudiarlos seriamente. Con esa finalidad, utilizaremos un modelo más rico de demanda y oferta.

19.2. **Forma estructural**

Supongamos que la cantidad y el precio de equilibrio en un mercado para un bien de consumo se determinan mediante el sistema de dos ecuaciones

$$\text{Demanda:} \quad Y_1 = \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 + \alpha_3 X_1 \qquad\qquad + U_1 \tag{19.1}$$

$$\text{Oferta:} \quad Y_2 = \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 \qquad\quad + \alpha_6 X_2 + \alpha_7 X_3 + U_2, \tag{19.2}$$

donde las variables endógenas son $Y_1 =$ cantidad, $Y_2 =$ precio, y las variables exógenas son $X_1 =$ renta de las familias, $X_2 =$ salario, $X_3 =$ tipo de interés, y una constante. Las perturbaciones estructurales son $U_1 =$ shock de demanda y $U_2 =$ shock de oferta, y supondremos que tienen esperanza cero,

$$E(U_1) = E(U_2) = 0, \tag{19.3}$$

y covarianza cero con todas las X,

$$\begin{aligned} C(X_1, U_1) &= C(X_1, U_2) = C(X_2, U_1) = C(X_2, U_2) \\ &= C(X_3, U_1) = C(X_3, U_2) = 0. \end{aligned} \tag{19.4}$$

Es precisamente esta ausencia de correlación con las perturbaciones la causa por la que las variables X son exógenas.

19.3. **Forma reducida**

Para hacer explícita la forma en que las variables exógenas y las perturbaciones determinan a las variables endógenas, resolvemos (19.3)-(19.4) para las Y en términos de las X y de las U. Para ello, es conveniente reescribir (19.1)-(19.2) pasando todos los términos con Y a la izquierda:

$$Y_1 - \alpha_1 Y_2 = \alpha_2 + \alpha_3 X_1 \qquad\qquad\qquad + U_1 \tag{19.5}$$

$$-\alpha_4 Y_1 + \quad Y_2 = \alpha_5 \qquad\quad + \alpha_6 X_2 + \alpha_7 X_3 + U_2. \tag{19.6}$$

A continuación, multiplicamos (19.6) por α_1 y lo sumamos a (19.5):

$$\begin{aligned}(1-\alpha_1\alpha_4)Y_1 = (\alpha_2+\alpha_1\alpha_5) + \quad \alpha_3 X_1 &+ \alpha_1\alpha_6 X_2 \\ &+ \alpha_1\alpha_7 X_3 + \quad U_1 + \alpha_1 U_2.\end{aligned} \tag{19.7}$$

Asimismo, multiplicamos (19.5) por α_4 y lo sumamos a (19.6):

$$\begin{aligned}(1-\alpha_1\alpha_4)Y_2 = (\alpha_2\alpha_4+\alpha_5) + \alpha_3\alpha_4 X_1 &+ \quad \alpha_6 X_2 \\ &+ \quad \alpha_7 X_3 + \quad U_1 + \quad U_2.\end{aligned} \tag{19.8}$$

Por conveniencia, sea $\Delta = 1 - \alpha_1\alpha_4$. Dividamos (19.7) y (19.8) entre Δ para obtener la forma reducida, en la cual cada variable endógena queda explícitamente en función de las variables exógenas y de las perturbaciones de la forma reducida:

$$\text{Cantidad:} \quad Y_1 = \pi_1 + \pi_2 X_1 + \pi_3 X_2 + \pi_4 X_3 + V_1 \tag{19.9}$$

$$\text{Precio:} \quad Y_2 = \pi_5 + \pi_6 X_1 + \pi_7 X_2 + \pi_8 X_3 + V_2, \tag{19.10}$$

donde

$$\begin{aligned}\pi_1 = (\alpha_2+\alpha_1\alpha_5)/\Delta, \quad \pi_2 = \quad \alpha_3/\Delta,& \\ \pi_3 = \alpha_1\alpha_6/\Delta, \quad \pi_4 = \alpha_1\alpha_7/\Delta,&\end{aligned} \tag{19.11}$$

$$\begin{aligned}\pi_5 = (\alpha_2\alpha_4+\alpha_5)/\Delta, \quad \pi_6 = \alpha_3\alpha_4/\Delta,& \\ \pi_7 = \quad \alpha_6/\Delta, \quad \pi_8 = \quad \alpha_7/\Delta,&\end{aligned} \tag{19.12}$$

$$V_1 = (U_1 + \alpha_1 U_2)/\Delta, \quad V_2 = (\alpha_4 U_1 + U_2)/\Delta. \tag{19.13}$$

Los coeficientes de la forma reducida son funciones no lineales de los coeficientes estructurales; las perturbaciones de la forma reducida son funciones lineales de las perturbaciones estructurales. Utilizando (19.3)-(19.4) en (19.5), deducimos que las perturbaciones de la forma reducida tienen esperanza cero,

$$E(V_1) = E(V_2) = 0, \tag{19.14}$$

y covarianza cero con todas las variables exógenas,

$$\begin{aligned} C(X_1, V_1) &= C(X_1, V_2) = C(X_2, V_1) = C(X_2, V_2) \\ &= C(X_3, V_1) = C(X_3, V_2) = 0. \end{aligned} \tag{19.15}$$

En consecuencia, nos hemos asegurado de que las *partes sistemáticas* de las ecuaciones de la forma reducida (19.9)-(19.10) son al menos los predictores lineales óptimos (quizás incluso las funciones de esperanza condicional) de las variables endógenas del lado izquierdo dadas todas las variables exógenas del lado derecho. Por tanto, sabemos (por el capítulo 13) que, en un muestreo aleatorio, las regresiones lineales MC muestrales de Y_1 y de Y_2 sobre todas las X estimarán de forma consistente los π's. De hecho, si las funciones de esperanza condicional son lineales, entonces la regresión lineal MC estimará de forma insesgada los π's.

Por el contrario, las partes sistemáticas de las ecuaciones estructurales (19.1)-(19.2) no son los predictores lineales óptimos de las variables endógenas del lado izquierdo dadas todas las variables exógenas del lado derecho. Si lo fuesen, entonces las desviaciones respecto a ellas, esto es, las perturbaciones, no estarían correlacionadas con cada una de las variables del lado derecho (véase el final del capítulo 9). No obstante, utilizando (19.10), (19.13) y (19.15) podemos calcular

$$\begin{aligned} C(Y_2, U_1) &= C(\pi_5 + \pi_6 X_1 + \pi_7 X_2 + \pi_8 X_3 + V_2, U_1) = C(V_2, U_1) \\ &= (1/\Delta) C(\alpha_4 U_1 + U_2, U_1) \\ &= (1/\Delta) \left[\alpha_4 V(U_1) + C(U_1, U_2)\right], \end{aligned}$$

que no será cero salvo por pura casualidad. De forma similar, $C(Y_1, U_2)$ no es cero, al igual que $C(Y_1, U_1)$ y $C(Y_2, U_2)$ tampoco lo son. Desde una perspectiva económica, no es sorprendente observar que los shocks de cualquier lado del mercado afectan a la cantidad y al precio. Desde una perspectiva estadística, es precisamente su correlación no nula con las perturbaciones estructurales lo que hace que las variables Y sean endógenas.

19.4. **Identificación**

La regresión lineal mínimo-cuadrática aplicada a las ecuaciones de la forma reducida genera estimadores consistentes de los π's. ¿Podemos convertir esas estimadores de los π's en estimadores consistentes de los α's?

La respuesta a esta pregunta requiere introducir el tema de la *identificación*. Antes de tratar de convertir estimadores de los π's en estimadores de los α's, debemos preguntarnos si podemos convertir los verdaderos valores de los π's en valores verdaderos de los α's. La cuestión es: «Si conociésemos los π's poblacionales, ¿conoceríamos los α's poblacionales?» En otras palabras, ¿tienen las ecuaciones (19.11)-(19.12) una solución única para los α's en términos de los π's? En caso afirmativo, diremos que los α's *están identificados*; en caso contrario, diremos que *no están identificados.* Solamente se pueden estimar α's que estén identificados. Como veremos, es posible que algunos de los α's en un modelo estén identificados y otros no.

Se han diseñado diferentes reglas para determinar si los parámetros estructurales están identificados. Pero la mejor forma de demostrar que podemos despejar los parámetros estructurales en el sistema de ecuaciones es resolviendo de verdad el sistema. Este será el enfoque que adoptaremos.

En el presente modelo demostraremos que todos los α's están identificados. Claramente, podemos despejar las pendientes estructurales de (19.11)-(19.12) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\alpha_4 = \pi_6/\pi_2, \quad \alpha_1 = \pi_3/\pi_7 \quad \text{(o de forma equivalente, } \alpha_1 = \pi_4/\pi_8), \\ &\Delta = 1 - \alpha_1\alpha_4, \quad \alpha_3 = \Delta\pi_2, \quad \alpha_6 = \Delta\pi_7, \quad \alpha_7 = \Delta\pi_8. \end{aligned} \tag{19.16}$$

Las soluciones para las constantes estructurales son algo menos obvias:

$$\alpha_2 = \pi_1 - \alpha_1\pi_5, \quad \alpha_5 = \pi_5 - \alpha_4\pi_1. \tag{19.17}$$

Por tanto, todos los parámetros α están identificados.

Para ver que la identificación no se cumple siempre, consideremos el sencillo modelo de oferta-demanda del capítulo 18, sin más variables exógenas que la constante. Si conociésemos las magnitudes numéricas de las dos π's en este modelo, esto es,

$$\pi_1 = (\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4)/(\alpha_2 - \alpha_4), \quad \pi_2 = (\alpha_3 - \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_4),$$

¿sabríamos las magnitudes numéricas de los cuatro α's? La respuesta es no: existen muchas combinaciones de valores de los cuatro α's que proporcionan valores exactamente iguales para cada uno de los dos π's. Así pues, no está identificado ninguno de los parámetros α's de este modelo.

19.5. **Identificación: planteamiento alternativo**

El análisis de identificación puede simplificarse planteando la relación entre los π's y los α's en nuestro modelo de una forma alternativa. Este enfoque alternativo evita el uso de Δ y facilita el análisis por separado de las dos ecuaciones estructurales.

Para la ecuación estructural de demanda, sustituyendo (19.9)-(19.10) en (19.5) tenemos que:

$$\begin{aligned} &(\pi_1 + \pi_2X_1 + \pi_3X_2 + \pi_4X_3 + V_1) \\ &\quad -\alpha_1(\pi_5 + \pi_6X_1 + \pi_7X_2 + \pi_8X_3 + V_2) = \alpha_2 + \alpha_3X_1 + U_1. \end{aligned}$$

Reescribiendo los términos en el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}(\pi_1 - \alpha_1\pi_5) \;+\; (\pi_2 - \alpha_1\pi_6)\; X_1 \;+\; &(\pi_3 - \alpha_1\pi_7)X_2 \\ &+ (\pi_4 - \alpha_1\pi_8)X_3 + (V_1 - \alpha_1 V_2) \\ = \alpha_2 \quad + \quad \alpha_3 \quad X_1 \qquad\qquad &\qquad\qquad + \quad U_1.\end{aligned}$$

Emparejando los coeficientes de la izquierda y de la derecha:

$$\pi_1 - \alpha_1\pi_5 = \alpha_2 \tag{19.18a}$$

$$\pi_2 - \alpha_1\pi_6 = \alpha_3 \tag{19.18b}$$

$$\pi_3 - \alpha_1\pi_7 = 0 \tag{19.18c}$$

$$\pi_4 - \alpha_1\pi_8 = 0. \tag{19.18d}$$

A partir de aquí es fácil ver cómo se pueden despejar de forma unívoca los α's de la ecuación de demanda en términos de los π's. Comencemos por el componente más simple de (19.18), esto es por una ecuación que tenga un 0 en el lado derecho. Así, de la ecuación (19.18c) obtenemos $\alpha_1 = \pi_3/\pi_7$; con (19.18d) obtenemos de nuevo α_1, ahora en función de π_4/π_8. Dado α_1, despejamos α_2 de (19.18a) y α_3 de (19.18b).

Para la ecuación estructural de oferta, sustituyendo (19.9)-(19.10) en (19.6), agrupando los términos de la izquierda e igualando los coeficientes de la izquierda y de la derecha, obtenemos que:

$$\pi_5 - \alpha_4\pi_1 = \alpha_5 \tag{19.19a}$$

$$\pi_6 - \alpha_4\pi_2 = 0 \tag{19.19b}$$

$$\pi_7 - \alpha_4\pi_3 = \alpha_6 \tag{19.19c}$$

$$\pi_8 - \alpha_4\pi_4 = \alpha_7 \tag{19.19d}$$

A partir de aquí es fácil ver cómo se pueden despejar de forma unívoca los α's de la ecuación de oferta. Comencemos por el componente más sencillo de (19.19), esto es, por una ecuación que tenga un 0 en el lado derecho. A partir de (19.19b) obtenemos que $\alpha_4 = \pi_6/\pi_2$. Dado α_4, despejamos α_5, α_6, y α_7 de (19.19a), (19.19c), y (19.19d), respectivamente.

Una vez establecido que todos los α's están identificados, el siguiente paso es preguntarnos sobre la posibilidad de estimarlos, por *mínimos cuadrados indirectos*, a partir de la muestra. Con esto, lo que se tiene en mente es un procedimiento bietápico: estimar los π's por medio de la regresión lineal mínimo-cuadrática de cada *Y* sobre todas las *X*; insertar luego estas estimaciones en (19.18) y (19.19) y resolver el sistema para encontrar los estimadores de los α's.

Si aplicamos este procedimiento, puede aparecer el tema de las *restricciones*. Cuando analizamos la cuestión de la identificación, hemos dado con una característica interesante del presente modelo de demanda-oferta. Nuestra especificación de las ecuaciones estructurales implica una restricción sobre los parámetros de la forma reducida, que consiste en

$$\pi_3/\pi_7 = \pi_4/\pi_8, \tag{19.20}$$

puesto que ambos cocientes son iguales a α_1. Esta relación entre los π's es una información *a priori* que podríamos explotar a la hora de estimar la forma reducida. Si la restricción fuese lineal e implicase solamente a los coeficientes de una de las ecuaciones de la forma reducida, digamos $\pi_7 = \pi_8$, sabríamos cómo imponerla (véase el capítulo 12). Pero como es habitual en los modelos de ecuaciones simultáneas, la restricción es no lineal y afecta a varias ecuaciones, con lo que son precisos métodos de estimación más elaborados. Pospondremos la discusión rigurosa sobre estimación al capítulo siguiente.

19.6. **Variantes del modelo**

Investiguemos cómo puede variar la identificación de las ecuaciones de demanda y oferta al cambiar el modelo estructural.

Modelo A

Por conveniencia, volvamos a escribir el modelo sobre el cual estamos trabajando. La forma estructural es:

$$\begin{aligned}
&\text{Demanda:} \quad Y_1 = \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 + \alpha_3 X_1 \qquad\qquad\qquad\quad + U_1 \\
&\text{Oferta:} \qquad Y_2 = \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 \qquad\quad + \alpha_6 X_2 + \alpha_7 X_3 + U_2,
\end{aligned}$$

donde las variables endógenas son $Y_1 =$ cantidad, $Y_2 =$ precio, y las variables exógenas son $X_1 =$ renta de las familias, $X_2 =$ salario, $X_3 =$ tipo de interés, y una constante. Las perturbaciones estructurales, $U_1 =$ shock de demanda y $U_2 =$ shock de oferta, tienen esperanza cero y covarianza cero con todas las X.

La forma reducida es:

$$\begin{aligned}
&\text{Cantidad:} \quad Y_1 = \pi_1 + \pi_2 X_1 + \pi_3 X_2 + \pi_4 X_3 + V_1 \\
&\text{Precio:} \qquad Y_2 = \pi_5 + \pi_6 X_1 + \pi_7 X_2 + \pi_8 X_3 + V_2.
\end{aligned}$$

Las relaciones entre los parámetros estructurales y los de la forma reducida pueden mostrarse de forma más conveniente como:

Lado de la demanda		*Lado de la oferta*	
$\pi_1 - \alpha_1\pi_5 = \alpha_2$	(19.18a)	$\pi_5 - \alpha_4\pi_1 = \alpha_5$	(19.19a)
$\pi_2 - \alpha_1\pi_6 = \alpha_3$	(19.18b)	$\pi_6 - \alpha_4\pi_2 = 0$	(19.19b)
$\pi_3 - \alpha_1\pi_7 = 0$	(19.18c)	$\pi_7 - \alpha_4\pi_3 = \alpha_6$	(19.19c)
$\pi_4 - \alpha_1\pi_8 = 0$	(19.18d)	$\pi_8 - \alpha_4\pi_4 = \alpha_7$	(19.19d)

La identificación de los parámetros estructurales es ahora evidente. Del lado de la demanda, tendríamos cuatro ecuaciones con tres α's desconocidos. De estas ecuaciones obtenemos $\alpha_1 = \pi_3/\pi_7$ (o de forma equivalente, $\alpha_1 = \pi_4/\pi_8$), pudiendo obtener después α_2 y α_3. Por consiguiente, la ecuación de demanda está identificada. Del lado de la oferta, tendríamos cuatro ecuaciones con cuatro α's desconocidos. Obtenemos $\alpha_4 = \pi_6/\pi_2$, y luego α_5, α_6 y α_7. Por tanto la ecuación de oferta está identificada. Nótese asimismo que existe una restricción en los parámetros de la forma reducida, que consiste en $\pi_3/\pi_7 = \pi_4/\pi_8$.

Modelo B

Supongamos ahora que el modelo estructural es

$$\begin{array}{lll} \text{Demanda:} & Y_1 = \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 + \alpha_3 X_1 & + \alpha_8 X_3 + U_1 \\ \text{Oferta:} & Y_2 = \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 & + \alpha_6 X_2 + \alpha_7 X_3 + U_2. \end{array}$$

Las variables son las mismas que antes, al igual que los supuestos sobre las perturbaciones. El único cambio radica en el hecho de que se ha incluido el tipo de interés X_3 en la ecuación de demanda. Rehaciendo los cálculos efectuados en la derivación del Modelo A, observamos que la forma reducida mantiene el mismo formato, pero ahora la relación entre los α's y los π's es

Lado de la demanda		*Lado de la oferta*	
$\pi_1 - \alpha_1\pi_5 = \alpha_2$	(19.21a)	$\pi_5 - \alpha_4\pi_1 = \alpha_5$	(19.22a)
$\pi_2 - \alpha_1\pi_6 = \alpha_3$	(19.21b)	$\pi_6 - \alpha_4\pi_2 = 0$	(19.22b)
$\pi_3 - \alpha_1\pi_7 = 0$	(19.21c)	$\pi_7 - \alpha_4\pi_3 = \alpha_6$	(19.22c)
$\pi_4 - \alpha_1\pi_8 = \alpha_8$	(19.21d)	$\pi_8 - \alpha_4\pi_4 = \alpha_7$	(19.22d)

Para este modelo, la identificación de los parámetros estructurales sigue estando clara. Del lado de la demanda, el único cambio se produce en (19.21d). Tenemos cuatro ecuaciones con cuatro α's desconocidos a partir de las cuales obtenemos $\alpha_1 = \pi_3/\pi_7$, y a continuación α_2, α_3 y α_8. La ecuación de demanda está por tanto identificada. (Además, la restricción sobre los parámetros de la forma reducida ha desaparecido.) Del lado de la oferta, nada ha cambiado. Tenemos cuatro ecuaciones con cuatro α's desconocidos. Obtendríamos $\alpha_4 = \pi_6/\pi_2$, y después α_5, α_6 y α_7. La ecuación de oferta está también identificada.

Modelo C

Finalmente, supongamos que el modelo estructural es

$$\begin{array}{lll} \text{Demanda:} & Y_1 = \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 + \alpha_3 X_1 & + U_1 \\ \text{Oferta:} & Y_2 = \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 + \alpha_8 X_1 + \alpha_6 X_2 + \alpha_7 X_3 + U_2. \end{array}$$

Las variables son las mismas que antes, al igual que los supuestos sobre las perturbaciones. El único cambio respecto al Modelo A es que se ha incluído la renta de las familias X_1 en la ecuación de oferta. Rehaciendo los cálculos efectuados en la derivación del Modelo A, observamos que la forma reducida mantiene el mismo formato, pero ahora la relación entre los α's y los π's pasa a ser

Lado de la demanda		*Lado de la oferta*	
$\pi_1 - \alpha_1\pi_5 = \alpha_2$	(19.23a)	$\pi_5 - \alpha_4\pi_1 = \alpha_5$	(19.24a)
$\pi_2 - \alpha_1\pi_6 = \alpha_3$	(19.23b)	$\pi_6 - \alpha_4\pi_2 = \alpha_8$	(19.24b)
$\pi_3 - \alpha_1\pi_7 = 0$	(19.23c)	$\pi_7 - \alpha_4\pi_3 = \alpha_6$	(19.24c)
$\pi_4 - \alpha_1\pi_8 = 0$	(19.23d)	$\pi_8 - \alpha_4\pi_4 = \alpha_7$	(19.24d)

Para este modelo, la identificación de los parámetros estructurales vuelve a estar clara. Del lado de la demanda, no hay cambios respecto al Modelo A. Tenemos cuatro ecuaciones con tres α's desconocidos, a partir de las cuales obtenemos $\alpha_1 = \pi_3/\pi_7$ (o de forma equivalente $\alpha_1 = \pi_4/\pi_8$), y a continuación α_2 y α_3. La ecuación de demanda está identificada. (Nótese que la restricción sobre los parámetros de la forma reducida ha vuelto a aparecer.) Del lado de la oferta, el único cambio se produce en (19.24b), pero es un cambio crucial, puesto que ahora tendríamos cuatro ecuaciones con cinco α's desconocidos, con lo cual no existe una única solución. Podemos elegir un valor arbitrario para α_4 a partir del cual generar un conjunto de valores de $\alpha_5, \alpha_8, \alpha_6$, y α_7 que satisfagan (19.24). Para cada valor que elijamos de α_4 obtendremos un conjunto diferente de valores de $\alpha_5, \alpha_8, \alpha_6$, y α_7. Concluímos por tanto que en el Modelo C *la ecuación de oferta no está identificada.*

19.7. **Condición de orden**

Al repasar los tres modelos, se observa qué cambios en el número y en la localización de *exclusiones* (omisión de variables) de las ecuaciones estructurales pueden afectar a la identificación del modelo. De hecho, puede entreverse una clave para averiguar si los parámetros de las ecuaciones estructurales están o no identificados, y si existen o no restricciones entre los parámetros de la forma reducida. Mirando los cuadros del lado de la demanda/lado de la oferta, observamos que en cada lado el número de ecuaciones que relacionan los α's y los π's es igual al número de variables exógenas (incluyendo la constante) que tiene el modelo, mientras que el número de incógnitas es igual al número de α's en la ecuación estructural. Recordemos el resultado algebraico que establece que si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones, la solución no es única.

Esta discusión previa motiva una regla de cálculo para la identificación. Estableceremos la condición de identificación en una forma tal que pueda aplicarse aunque tengamos más de dos ecuaciones estructurales. Sea $K =$ número de variables exógenas en el modelo (incluyendo la constante) y $H_j =$ número de coeficientes desconocidos en la j-ésima ecuación estructural. Entonces, una condición necesaria para que la j-ésima ecuación estructural esté identificada es que $K \geq H_j$. Esta es la *condición de* *orden*, o regla de cálculo, para la identificación. Además, si $K > H_j$, hay al menos una restricción en la forma reducida, en cuyo caso se dice que la ecuación estructural está *sobreidentificada*, mientras que si $K = H_j$, entonces no hay restricciones y la ecuación estructural está *exactamente identificada*.

También conocemos el resultado algebraico de que incluso cuando el número de incógnitas es igual o menor al número de ecuaciones, *puede no* existir solución única. Por tanto, que se satisfaga la condición de orden es un requisito necesario pero no suficiente de identificación. En muchos libros de texto los autores incluyen una *condición de rango*, que es una condición necesaria y suficiente de identificación. Esta condición de rango es equivalente a afirmar que los α's de la ecuación pueden expresarse de manera única en términos de los π's.

19.8. **Precaución**

La especificación de un modelo estructural no consiste en ir excluyendo variables hasta que el modelo esté identificado. La especificación debe recoger las ideas que el investigador tenga sobre el comportamiento de los agentes o de los sectores económicos. Al decidir la cantidad de producto a comprar, ¿tienen en cuenta las familias el salario que el empresario paga a sus trabajadores? ¿Tienen en cuenta las empresas las rentas de las familias que demandan su producto? Son este tipo de preguntas las que interesarán a todo aquel que se tome en serio la construcción de un modelo. Si un modelo no está identificado, no quiere decir que sea falso, sólo que no es estimable a partir del comportamiento observado.

Ejercicios

19.1. Considere el modelo de ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} Y_1 &= \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 X_1 \qquad\quad + U_1 \\ Y_2 &= \alpha_3 Y_1 \qquad\quad + \alpha_4 X_2 + U_2, \end{aligned}$$

donde las variables exógenas X_1 y X_2 son independientes de las perturbaciones U_1 y U_2. (Por conveniencia, todas las variables tienen media cero, con lo cual los términos constantes pueden ser ignorados.) La forma reducida del modelo es

$$\begin{aligned} Y_1 &= \pi_1 X_1 + \pi_2 X_2 + V_1 \\ Y_2 &= \pi_3 X_1 + \pi_4 X_2 + V_2. \end{aligned}$$

- Derive las expresiones algebraicas de los π's en términos de los α's.
- Sabiendo que $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 4$, $\pi_3 = -2$, $\pi_4 = 2$, determine los valores de α_1, α_2, α_3, y α_4.

19.2. Determine si están identificados los parámetros estructurales del siguiente modelo:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 X_1 + \alpha_4 X_2 + U_1 \\
Y_1 &= \alpha_5 + \alpha_6 Y_2 \qquad\qquad\qquad\quad + U_2,
\end{aligned}
$$

donde las variables exógenas X_1 y X_2 son independientes de las perturbaciones estructurales U_1 y U_2. Estas perturbaciones tienen esperanza cero y pueden estar correlacionadas entre sí.

19.3. Este es un ejemplo de no identificación ajeno a las ecuaciones simultáneas. Supongamos que las variables aleatorias Y_1 e Y_2 tienen esperanzas desconocidas μ_1 y μ_2, con lo que su suma, $Y = Y_1 + Y_2$, tiene esperanza $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Si conociese μ, ¿conocería μ_1 y μ_2? Si tuviese una muestra aleatoria de Y, ¿cómo estimaría μ? ¿Podría utilizar este estimador para estimar μ_1 y μ_2?

19.4. Si las ecuaciones (19.1) y (19.2) no hubiesen sido clasificadas como de «Demanda» y de «Oferta», ¿hubiese reconocido cuál era la ecuación de demanda y cuál la ecuación de oferta? ¿Por qué X_2 y X_3 están excluidas de la primera ecuación? ¿Por qué está X_1 excluida de la segunda ecuación? ¿Es importante que la ecuación de demanda tenga la variable cantidad en el lado izquierdo mientras que la ecuación de oferta tiene la variable precio en el lado izquierdo?

19.5. Suponga que en el Modelo C se sabe que $\alpha_3 = \alpha_8$. ¿Cómo cambiaría la identificación de la ecuación de oferta? ¿Puede modificarse la condición de orden para tener en cuenta estos casos? En caso afirmativo, ¿cómo?

CAPÍTULO 20

ESTIMACIÓN DE MODELOS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

20.1. **Introducción**

Con objeto de acometer la discusión sistemática de la estimación, continuaremos empleando los modelos del capítulo 19 como prototipos de modelos de ecuaciones simultáneas. Supondremos ahora que disponemos de una muestra aleatoria de $(Y_1, Y_2, X_1, X_2, X_3)$ y que deseamos estimar los parámetros estructurales de uno u otro de los modelos. Buscaremos la estimación consistente de los parámetros estructurales; no es posible obtener estimadores insesgados puesto que los coeficientes estructurales no son los mismos que los de una función de esperanza condicional que relacione a las variables observadas.

20.2. **Mínimos cuadrados indirectos**

Dado que las ecuaciones de la forma reducida son predictores lineales óptimos (o quizás incluso funciones de esperanza condicional), sabemos que podemos obtener estimadores consistentes (quizás incluso estimadores insesgados) de los π's mediante regresiones lineales MC de Y_1 e Y_2 sobre todas las X. Denotemos dichas regresiones muestrales como

$$\text{Cantidad:} \quad \widehat{Y}_1 = p_1 + p_2X_1 + p_3X_2 + p_4X_3 \tag{20.1}$$

$$\text{Precio:} \quad \widehat{Y}_2 = p_5 + p_6X_1 + p_7X_2 + p_8X_3. \tag{20.2}$$

El plan consistiría ahora en insertar estos p's en lugar de los π's en las ecuaciones del lado de la demanda/lado de la oferta del capítulo 19, y encontrar las estimaciones de los α's.

Implementemos este plan en primer lugar con el *Modelo B*. Las ecuaciones de interés, donde los π's y los α's se reemplazan por p's y a's, son

Lado de la demanda

$$p_1 - a_1p_5 = a_2 \tag{20.3a}$$

$$p_2 - a_1p_6 = a_3 \tag{20.3b}$$

Lado de la oferta

$$p_5 - a_4p_1 = a_5 \tag{20.4a}$$

$$p_6 - a_4p_2 = 0 \tag{20.4b}$$

$$p_3 - a_1 p_7 = 0 \qquad (20.3c) \qquad\qquad p_7 - a_4 p_3 = a_6 \qquad (20.4c)$$
$$p_4 - a_1 p_8 = a_8 \qquad (20.3d) \qquad\qquad p_8 - a_4 p_4 = a_7 \qquad (20.4d)$$

El cálculo de los estimadores por *mínimos-cuadrados indirectos* es ahora inmediato: repliquemos la secuencia que utilizábamos en el análisis de identificación del capítulo 19 para encontrar los α's a partir de los π's. Más específicamente, del lado de la demanda, obtenemos $a_1 = p_3/p_7$ a partir de (20.3c), y obtenemos después a_2, a_3, y a_8 de (20.3a, b, d). Del lado de la oferta, obtenemos $a_4 = p_6/p_2$ de (20.4b), obtenemos después a_5, a_6, y a_7 de (20.4a, c, d). Todos estos a's son estimadores consistentes de los correspondientes α's: como los p's son estimadores consistentes de los π's y los a's son funciones continuas de los p's, podemos aplicar el Teorema de Slutsky.

Intentemos ahora implementar el plan con el *Modelo A*. Las ecuaciones quedan

Lado de la demanda — *Lado de la oferta*

$$p_1 - a_1 p_5 = a_2 \qquad (20.5a) \qquad\qquad p_5 - a_4 p_1 = a_5 \qquad (20.6a)$$
$$p_2 - a_1 p_6 = a_3 \qquad (20.5b) \qquad\qquad p_6 - a_4 p_2 = 0 \qquad (20.6b)$$
$$p_3 - a_1 p_7 = 0 \qquad (20.5c) \qquad\qquad p_7 - a_4 p_3 = a_6 \qquad (20.6c)$$
$$p_4 - a_1 p_8 = 0 \qquad (20.5d) \qquad\qquad p_8 - a_4 p_4 = a_7 \qquad (20.6d)$$

Del lado de la oferta, los mínimos cuadrados indirectos proporcionan el mismo resultado que antes. Del lado de la demanda, sin embargo, observamos que (20.5c)-(20.5d) son dos ecuaciones con una incógnita, las cuales, excepto por mera coincidencia, no tendrán la misma solución. Esto es cierto aunque las correspondientes relaciones poblacionales, esto es, las ecuaciones (19.18c)-(19.18d), tuviesen una solución común, en concreto, $\alpha_1 = \pi_3/\pi_7 = \pi_4/\pi_8$. Podemos tomar $a_1 = p_3/p_7$ o $a_1 = p_4/p_8$, y obtener después a_2 y a_3 (con valores que dependerán de la elección que realicemos de a_1). Ambos conjuntos de estimadores de mínimos cuadrados indirectos son estimadores consistentes desde un punto de vista estadístico aún cuando difieran a nivel muestral. (De igual forma que sabemos que los estadísticos muestrales no son iguales a los parámetros poblacionales, sabemos que dos estadísticos muestrales no serán iguales aunque el parámetro que estimen sea el mismo.)

Esta sobredeterminación, conocida como *sobreidentificación*, debe ser contemplada como una oportunidad más que como un problema. (De igual forma que sabemos que es una ventaja tener dos estimadores insesgados de un parámetro, resulta ventajoso tener dos estimadores consistentes.) Presumiblemente, podemos combinar las dos estimaciones de la ecuación de demanda formando una estimación mejor todavía. Más adelante discutiremos un método para llevar esto a cabo.

Finalmente, para el *Modelo C*, las ecuaciones serían

Lado de la demanda — *Lado de la oferta*

$$p_1 - a_1 p_5 = a_2 \qquad (20.7a) \qquad\qquad p_5 - a_4 p_1 = a_5 \qquad (20.8a)$$
$$p_2 - a_1 p_6 = a_3 \qquad (20.7b) \qquad\qquad p_6 - a_4 p_2 = a_8 \qquad (20.8b)$$
$$p_3 - a_1 p_7 = 0 \qquad (20.7c) \qquad\qquad p_7 - a_4 p_3 = a_6 \qquad (20.8c)$$
$$p_4 - a_1 p_8 = 0 \qquad (20.7d) \qquad\qquad p_8 - a_4 p_4 = a_7 \qquad (20.8d)$$

Del lado de la demanda, estamos en la misma situación que con el Modelo A. Pero del lado de la oferta, la situación es completamente diferente. Tenemos cuatro ecuaciones con cinco incógnitas, lo que presumiblemente da lugar a un conjunto infinito de soluciones distintas, una para cada valor arbitrario de a_4. No debe pensarse que ninguna de esas soluciones da lugar a estimadores consistentes de los α's en la ecuación de oferta del Modelo C, al no estar, después de todo, identificados.

Recapitulando, hemos encontrado que el método de los mínimos cuadrados indirectos proporciona estimadores consistentes de los parámetros de aquellas ecuaciones estructurales que estén identificadas, pero no resuelve de forma automática la elección que debe realizarse cuando una ecuación está sobreidentificada.

20.3. **Mínimos cuadrados bietápicos**

Existe un procedimiento general que permite obtener directamente estimadores consistentes de los parámetros de una ecuación estructural identificada, esté o no sobreidentificada. Continuaremos suponiendo que disponemos de una muestra aleatoria de observaciones de todas las Y y todas las X.

El método es conocido como *mínimos cuadrados en dos etapas o bietápicos*, abreviado a menudo como *MC2E*. En la *primera etapa*, se estima cada ecuación de la forma reducida mediante una regresión lineal MC y se obtienen los correspondientes valores ajustados. En la *segunda etapa*, en cada ecuación estructural, se reemplaza cada variable endógena del lado derecho por su valor ajustado, y se vuelve a efectuar la regresión lineal MC.

Para ser más explícitos, trabajemos con el Modelo A, cuya forma estructural es

$$\text{Demanda:}\quad Y_1 = \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 + \alpha_3 X_1 \qquad\qquad + U_1 \tag{20.9}$$

$$\text{Oferta:}\quad Y_2 = \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 \qquad + \alpha_6 X_2 + \alpha_7 X_3 + U_2 \tag{20.10}$$

y cuya forma reducida es

$$\text{Cantidad:}\quad Y_1 = \pi_1 + \pi_2 X_1 + \pi_3 X_2 + \pi_4 X_3 + V_1 \tag{20.11}$$

$$\text{Precio:}\quad Y_2 = \pi_5 + \pi_6 X_1 + \pi_7 X_2 + \pi_8 X_3 + V_2. \tag{20.12}$$

En adelante, nos referiremos a la constante —la «variable» cuyo coeficiente es la constante— como 1.

Primera etapa: estimamos la forma reducida, obteniendo

$$\widehat{Y}_1 = p_1 + p_2 X_1 + p_3 X_2 + p_4 X_3 \tag{20.13}$$

$$\widehat{Y}_2 = p_5 + p_6 X_1 + p_7 X_2 + p_8 X_3, \tag{20.14}$$

y generamos las variables $\widehat{Y}_1$ e $\widehat{Y}_2$ para cada observación. Segunda etapa: para la ecuación de demanda, regresamos Y_1 sobre las tres variables $\widehat{Y}_1$, 1, y X_1, obteniendo

$$\widetilde{Y}_1 = a_1^* \widehat{Y}_2 + a_2^* + a_3^* X_1. \qquad (20.15)$$

Para la ecuación de oferta, regresamos Y_2 sobre las cuatro variables $\widehat{Y}_1$, 1, X_2, y X_3, obteniendo

$$\widetilde{Y}_2 = a_4^* \widehat{Y}_1 + a_5^* + a_6^* X_2 + a_7^* X_3. \qquad (20.16)$$

Estos a^*'s son los estimadores de mínimos cuadrados en dos etapas de los α's.

Se verifica que si una ecuación estructural está exactamente identificada (como ocurre con la ecuación de oferta para los Modelos A y B), entonces los estimadores MC2E coinciden con los estimadores de mínimos cuadrados indirectos, mientras que si una ecuación estructural está sobreidentificada (como ocurre con la ecuación de demanda para los Modelos A y C), entonces los estimadores MC2E no hacen sino combinar las distintas estimaciones alternativas de mínimos cuadrados indirectos que pueden obtenerse en la práctica. En cualquier caso, los estimadores MC2E son consistentes.

¿Qué ocurre si tratamos de aplicar mínimos cuadrados bietápicos a una ecuación que no está identificada? Consideremos el Modelo C, compuesto por la ecuación de demanda (20.1) y por la ecuación de oferta

$$\text{Oferta:} \quad Y_2 = \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 + \alpha_8 X_1 + \alpha_6 X_2 + \alpha_7 X_3 + U_2.$$

Supongamos que reemplazamos Y_1 por $\widehat{Y}_1$, y tratamos de efectuar la regresión lineal MC de Y_2 sobre $\widehat{Y}_1$, 1, X_1, X_2, y X_3. Habrá *multicolinealidad exacta* entre las variables explicativas: después de todo, como muestra la ecuación (20.13), $\widehat{Y}_1$ ha sido construida como una combinación lineal exacta de las X. Por tanto, la segunda etapa de la estimación MC2E fallará, tal y como debe ser, puesto que en el Modelo C la ecuación de oferta no está identificada, y por tanto no es estimable.

20.4. **Precaución**

Cuando se implementa MC2E a través de la aplicación sucesiva de un programa de ordenador de mínimos cuadrados (en lugar de aplicar un programa específicamente diseñado para efectuar MC2E) existe una pequeña complicación. En la segunda etapa, el programa operará como si estuviese efectuando una regresión lineal MC convencional. Como consecuencia, los errores estándar que muestre no serán apropiados. En concreto, consideremos la ecuación de demanda del Modelo A. En la salida de la segunda etapa, los errores estándar convencionales se basarán en una estimación de $V(U_1)$ a partir de la suma de los cuadrados de los residuos:

$$\widehat{u}_1 = Y_1 - (a_1^* \widehat{Y}_2 + a_2^* + a_3^* X_1).$$

Pero para estimar adecuadamente $V(U_1)$, los residuos adecuados son:

$$u_1 = Y_1 - (a_1^* Y_2 + a_2^* + a_3^* X_1).$$

No obstante, es sencillo ajustar adecuadamente los errores estándar de los coeficientes mostrados por el programa de ordenador: debe multiplicarse cada uno de ellos por la raíz cuadrada de $\sum u_1^2 \Big/ \sum \widehat{u}_1^2$.

20.5. Un ejemplo empírico

A continuación ilustraremos la teoría desarrollada con un ejemplo del mundo real. Consideremos el siguiente modelo microeconómico de oferta y demanda de trabajo:

$$\text{Oferta:} \quad Y_1 = \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 + \alpha_3 X_1 \qquad\qquad + U_1 \tag{20.17}$$

$$\text{Demanda:} \quad Y_2 = \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 \qquad + \alpha_6 X_2 + \alpha_7 X_3 + \alpha_8 X_4 + U_2. \tag{20.18}$$

donde Y_1 = meses trabajados (cantidad) e Y_2 = salario (precio) son las variables endógenas. Las variables exógenas (junto con la constante 1), a saber, X_1 = tamaño familiar, X_2 = años de educación, X_3 = edad, y X_4 = etnia, son independientes de las perturbaciones estructurales U_1 y U_2. Estas perturbaciones tienen esperanza cero, y pueden estar correlacionadas entre sí. La teoría económica de la oferta y la demanda sugiere que los trabajadores desean trabajar más si los salarios son mayores, mientras que las empresas desean pagar menores salarios por unidad de trabajo adicional, esto es, $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_4 < 0$.

La forma reducida del modelo es

$$\text{Cantidad:} \quad Y_1 = \pi_1 + \pi_2 X_1 + \pi_3 X_2 + \pi_4 X_3 + \pi_5 X_4 + V_1 \tag{20.19}$$

$$\text{Precio:} \quad Y_2 = \pi_6 + \pi_7 X_1 + \pi_8 X_2 + \pi_9 X_3 + \pi_{10} X_4 + V_2. \tag{20.20}$$

Siguiendo el enfoque del capítulo 19, obtenemos las siguientes ecuaciones para evaluar la identificación:

Lado de la demanda	*Lado de la oferta*
$\pi_1 - \alpha_1 \pi_6 = \alpha_2$	$\pi_6 - \alpha_4 \pi_1 = \alpha_5$
$\pi_2 - \alpha_1 \pi_7 = \alpha_3$	$\pi_7 - \alpha_4 \pi_2 = 0$
$\pi_3 - \alpha_1 \pi_8 = 0$	$\pi_8 - \alpha_4 \pi_3 = \alpha_6$
$\pi_4 - \alpha_1 \pi_9 = 0$	$\pi_9 - \alpha_4 \pi_4 = \alpha_7$
$\pi_5 - \alpha_1 \pi_{10} = 0$	$\pi_{10} - \alpha_4 \pi_5 = \alpha_8$

Observamos que en el lado derecho la ecuación de demanda está exactamente identificada, mientras que en el lado izquierdo la ecuación de oferta está sobreidentificada, y que el modelo implica las siguientes restricciones sobre los coeficientes de la forma reducida:

$$\pi_3/\pi_8 = \pi_4/\pi_9 = \pi_5/\pi_{10},$$

siendo los tres cocientes iguales a α_1.

Recordemos ahora el archivo SCF1, presentado en el ejercicio 7.8, que hacía referencia a 100 hombres cabeza de familia, entrevistados en 1963-1964. El archivo incluía estas variables: V2 = tamaño familiar, V3 = años de educación, V4 = edad (en años), V6 = número de meses al año trabajados, V7 = raza (siendo igual a 1 si blanca, 2 si negra), V9 = ganancias salariales (en miles de dólares). Supongamos que podemos aplicar el modelo (20.17)-(20.18) con las siguientes variables generadas: Y_1 = V6; Y_2 = V9/V6; X_1 = V2; X_2 = V3; X_3 = V4, y X_4 = V7 − 1 (con lo cual ahora la variable será igual a 0 si el individuo es de raza blanca, 1 si es de raza negra).

Si efectuamos una regresión mínimo-cuadrática directamente sobre las ecuaciones estructurales obtenemos los siguientes resultados:

$$\tilde{\tilde{Y}}_1 = \underset{(0{,}260)}{0{,}271}\,Y_2 + \underset{(0{,}378)}{11{,}748} - \underset{(0{,}073)}{0{,}053}\,X_1$$

$$\tilde{\tilde{Y}}_2 = \underset{(0{,}034)}{0{,}003}\,Y_1 - \underset{(0{,}469)}{0{,}539} \qquad + \underset{(0{,}011)}{0{,}067}\,X_2 + \underset{(0{,}005)}{0{,}011}\,X_3 - \underset{(0{,}146)}{0{,}119}\,X_4.$$

Por supuesto, no cabe interpretarlos como estimaciones de las ecuaciones estructurales de oferta y de demanda.

Pasemos ahora a la estimación por mínimos cuadrados bietápicos. En la primera etapa estimamos las ecuaciones de la forma reducida (20.19)-(20.20) por medio de una regresión lineal mínimo-cuadrática, obteniendo

$$\widehat{Y}_1 = \underset{(0{,}912)}{11{,}930} - \underset{(0{,}074)}{0{,}064}\,X_1 + \underset{(0{,}033)}{0{,}041}\,X_2 - \underset{(0{,}015)}{0{,}010}\,X_3 - \underset{(0{,}436)}{0{,}628}\,X_4$$

$$\widehat{Y}_2 = \underset{(0{,}302)}{-0{,}593} + \underset{(0{,}025)}{0{,}014}\,X_1 + \underset{(0{,}011)}{0{,}067}\,X_2 + \underset{(0{,}005)}{0{,}011}\,X_3 - \underset{(0{,}144)}{0{,}119}\,X_4.$$

En la segunda etapa, sustituimos los valores ajustados $\widehat{Y}_2$ en lugar de Y_2 en el lado derecho de la ecuación de oferta, e $\widehat{Y}_1$ en lugar de Y_1 en el lado derecho de la ecuación de demanda, y aplicamos mínimos cuadrados sobre las (así modificadas) ecuaciones estructurales, obteniendo

$$\text{Oferta:} \quad \breve{Y}_1 = \underset{(0{,}472)}{0{,}767}\;\widehat{Y}_2 + \underset{(0{,}464)}{11{,}420} - \underset{(0{,}075)}{0{,}054}\,X_1$$

$$\text{Demanda:} \quad \breve{Y}_2 = \underset{(0{,}462)}{-0{,}218}\,\widehat{Y}_1 + \underset{(5{,}330)}{2{,}013}$$

$$+ \underset{(0{,}024)}{0{,}076}\,X_2 + \underset{(0{,}007)}{0{,}009}\,X_3 - \underset{(0{,}334)}{0{,}256}\,X_4.$$

Los errores estándar de los estimadores MC2E de los coeficientes han sido calculados apropiadamente.

Desde una perspectiva económica, la característica más interesante de los resultados obtenidos por MC2E respecto a los obtenidos por MC es que el coeficiente de la cantidad en la ecuación de demanda tiene ahora el signo correcto, y que el coeficiente del precio en la ecuación de demanda es mucho mayor. Sin embargo, no siempre se encuentran estas diferencias tan notables.

20.6. Justificación de los mínimos cuadrados bietápicos

A fin de ofrecer una justificación heurística de la estimación MC2E, trabajaremos con las ecuaciones estructurales del Modelo A del capítulo 19, reescritas como

$$U_1 = Y_1 - (\alpha_1 Y_2 + \alpha_2 + \alpha_3 X_1) \tag{20.21}$$

$$U_2 = Y_2 - (\alpha_4 Y_1 + \alpha_5 \qquad + \alpha_6 X_2 + \alpha_7 X_3). \tag{20.22}$$

Recordemos los supuestos que efectuamos en ese capítulo:

$$E(U_1) = 0, \quad C(X_1, U_1) = 0, \quad C(X_2, U_1) = 0, \quad C(X_3, U_1) = 0 \tag{20.23}$$

$$E(U_2) = 0, \quad C(X_1, U_2) = 0, \quad C(X_2, U_2) = 0, \quad C(X_3, U_2) = 0. \tag{20.24}$$

Las expresiones (20.21)-(20.24) nos dicen que los valores poblacionales de los α's son los valores en la población que hacen que las expresiones para U_1 y U_2 tengan esperanza cero y covarianzas cero con todas las variables exógenas. Denotemos como a's a los estimadores potenciales de los α's, y definamos los análogos muestrales de (20.21)-(20.22), esto es

$$u_1 = Y_1 - (a_1 Y_2 + a_2 + a_3 X_1) \tag{20.25}$$

$$u_2 = Y_2 - (a_4 Y_1 + a_5 \qquad + a_6 X_2 + a_7 X_3). \tag{20.26}$$

Parece natural escoger los valores de los a's que hagan que las expresiones para u_1 y u_2 tengan, a nivel muestral, media cero y covarianzas cero con todas las variables exógenas. Lo que esta regla natural nos dice es: seleccione los a's de tal forma que se cumpla lo siguiente:

$$\sum u_1 = 0, \quad \sum X_1 u_1 = 0, \quad \sum X_2 u_1 = 0, \quad \sum X_3 u_1 = 0 \tag{20.27}$$

$$\sum u_2 = 0, \quad \sum X_1 u_2 = 0, \quad \sum X_2 u_2 = 0, \quad \sum X_3 u_2 = 0, \tag{20.28}$$

donde $\sum$ denota el sumatorio sobre las n observaciones muestrales. (Igualar las sumas a cero es equivalente a igualar las medias a cero.) Este enfoque natural —elegir estimadores de tal forma que las medias y las covarianzas muestrales sean cero cuando las correspondientes medias y covarianzas poblacionales son cero— se denomina a menudo método de estimación por *variables instrumentales*. En (20.27)-(20.28) las variables instrumentales son 1, X_1, X_2, y X_3.

En (20.28) tenemos cuatro ecuaciones para los cuatro coeficientes de la oferta, a_4, a_5, a_6, y a_7. Resolviendo el sistema se obtendrán estimadores consistentes (en el sentido estadístico). Veremos que los estimadores MC2E de la función de oferta resuelven implícitamente esas ecuaciones. En (20.27) tenemos cuatro ecuaciones para los tres coeficientes de la demanda, a_1, a_2, y a_3, con lo que esas ecuaciones no tienen solución. No obstante, resolviendo un sistema formado por tres ecuaciones cualquiera de entre esas cuatro, o incluso por tres combinaciones lineales cualquiera de las cuatro ecuaciones, se obtendrán estimadores consistentes (en el sentido estadístico). Veremos que los estimadores MC2E de la función de demanda resuelven implícitamente un sistema en particular, formado por tres combinaciones lineales concretas de las cuatro ecuaciones de (20.27). En adelante, utilizaremos a^*'s para denotar a los estimadores MC2E de los α's.

Ecuación de oferta

Consideremos los residuos de la estimación MC2E de la ecuación de oferta

$$\widehat{u}_2 = Y_2 - \left(a_4^*\widehat{Y}_1 + a_5^* + a_6^* X_2 + a_7^* X_3\right). \tag{20.29}$$

Las ecuaciones que determinan estas a^*'s son las correspondientes a las condiciones de primer orden de la regresión lineal MC de Y_2 sobre 1, $\widehat{Y}_1$, X_2, y X_3, es decir

$$\sum \widehat{u}_2 = 0, \quad \sum \widehat{Y}_1\widehat{u}_2 = 0, \quad \sum X_2\widehat{u}_2 = 0, \quad \sum X_3\widehat{u}_2 = 0. \tag{20.30}$$

Con ayuda del álgebra se puede verificar que (20.30) es equivalente a (20.28). Consideremos la estimación de la ecuación de la forma reducida:

$$\widehat{Y}_1 = p_1 + p_2 X_1 + p_3 X_2 + p_4 X_3. \tag{20.31}$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda condición de (20.30) se obtiene

$$\sum (p_1 + p_2 X_1 + p_3 X_2 + p_4 X_3)\widehat{u}_2 = 0,$$

esto es,

$$p_1 \sum \widehat{u}_2 + p_2 \sum X_1\widehat{u}_2 + p_3 \sum X_2\widehat{u}_2 + p_4 \sum X_3\widehat{u}_2 = 0. \tag{20.32}$$

Junto con las restantes condiciones en (20.30), se llega al resultado de que (20.30) es equivalente a

$$\sum \widehat{u}_2 = 0, \quad \sum X_1\widehat{u}_2 = 0, \quad \sum X_2\widehat{u}_2 = 0, \quad \sum X_3\widehat{u}_2 = 0. \tag{20.33}$$

La diferencia entre (20.33) y (20.28) radica en la diferencia entre $\widehat{u}_2$ y u_2. Restando (20.26) a (20.29) obtenemos,

$$\widehat{u}_2 = u_2 + a_4(Y_1 - \widehat{Y}_1) = u_2 + a_4 v_1, \tag{20.34}$$

donde $v_1 = Y_1 - \widehat{Y}_1$, al ser el residuo de la regresión MC de la forma reducida (20.31), debe satisfacer las condiciones de primer orden

$$\sum v_1 = 0, \quad \sum X_1 v_1 = 0, \quad \sum X_2 v_1 = 0, \quad \sum X_3 v_1 = 0. \tag{20.35}$$

Al sustituir (20.34)-(20.35), tenemos que las condiciones de primer orden (20.33) son equivalentes a (20.28). Por tanto los estimadores MC2E a_4^*, a_5^*, a_6^*, y a_7^*, que resuelven (20.33), son también la solución de (20.28).

Esta representación algebraica ofrece una interpretación de variables instrumentales a la estimación MC2E cuando la ecuación estructural está exactamente identificada.

Ecuación de demanda

Cuando se aplica el mismo enfoque a la ecuación de demanda del Modelo A, encontramos que los estimadores MC2E a_1^*, a_2^*, a_3^* satisfacen las condiciones

$$\sum u_1 = 0, \quad \sum X_1 u_1 = 0, \qquad (p_7 \sum X_2 u_1 + p_8 \sum X_3 u_1) = 0,$$

que son tres combinaciones de las cuatro ecuaciones en (20.27). Además, se cumple (si bien no es sencillo de ver) que dichas combinaciones son las óptimas, en el sentido de que generan estimadores consistentes con varianza asintótica mínima. En la interpretación por variables instrumentales de la estimación MC2E de esta ecuación estructural sobreidentificada, las variables instrumentales son 1, $\widehat{Y}_2$, y X_1.

Ejercicios

20.1. Consideremos el modelo de ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} Y_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 X_1 \qquad + \alpha_4 X_3 + U_1 \\ Y_1 &= \alpha_5 + \alpha_6 Y_2 \qquad + \alpha_7 X_2 \qquad + U_2, \end{aligned}$$

donde las variables exógenas X_1, X_2, y X_3 son independientes de las perturbaciones U_1 y U_2, que tienen esperanza cero. En una muestra de 108 observaciones, la regresión lineal MC produce las siguientes estimaciones de las ecuaciones de forma reducida:

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_1 &= 1 + 2X_1 + 3X_2 - 2X_3 \\ \widehat{Y}_2 &= 4 - 6X_1 - 2X_2 + 4X_3. \end{aligned}$$

- Utilizando esta muestra, halle estimadores consistentes de los α's.
- Si se le pidiese la predicción de Y_1, dados los valores de Y_2 y X_2, ¿utilizaría estos estimadores de los α's a fin de construir el predictor

  $$\widetilde{Y}_1 = a_5 + a_6 Y_2 + a_7 X_2,$$

  o simplemente efectuaría la regresión lineal MC de Y_1 sobre 1, Y_2, y X_2? Justifique la respuesta.

20.2. Considere el modelo de ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} Y_1 &= \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 X_2 + U_1 \\ Y_2 &= \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 X_3 + U_2, \end{aligned}$$

donde las variables exógenas X_1, X_2, y X_3 son independientes de las perturbaciones U_1 y U_2, y (por conveniencia) todas las variables tienen media cero (con lo cual no se necesitan los términos constantes). En una muestra de 200 observaciones, la regresión lineal MC produce las siguientes estimaciones de las ecuaciones de forma reducida:

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_1 &= 2X_1 + 3X_2 + 2X_3 \\ \widehat{Y}_2 &= -4X_1 - 9X_2 + 1X_3. \end{aligned}$$

Utilizando esta muestra, encuentre estimadores consistentes de los α's.

20.3. Considere el siguiente modelo microeconómico de demanda y oferta de trabajo:

$$\begin{aligned} &\text{Demanda:} \quad Y_1 = \alpha_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 X_1 + \alpha_4 X_2 + U_1 \\ &\text{Oferta:} \quad\;\;\; Y_1 = \alpha_5 + \alpha_6 Y_2 \qquad\qquad\qquad\;\; + U_2. \end{aligned}$$

donde Y_1 (= horas de trabajo) e Y_2 (= salario) son las variables endógenas. Las variables exógenas, además de la constante, X_1 (= tipo de interés) y X_2 (= precio de las materias primas), son independientes de las perturbaciones estructurales U_1 y U_2. Estas perturbaciones tienen esperanza cero, y pueden estar correlacionadas entre sí. En adelante, respecto a la estimación, supondremos que disponemos de una muestra de observaciones de Y_1, Y_2, X_1, y X_2 de tamaño moderado, y que las regresiones lineales MC que se realicen incluyen constante.

- Derive la forma reducida.
- ¿Está identificada la ecuación de oferta? ¿Debe estimarse a partir de la regresión lineal mínimo-cuadrática de Y_1 sobre Y_2? Justifique la respuesta.
- ¿Está identificada la ecuación de demanda? ¿Debe estimarse a partir de la regresión lineal mínimo-cuadrática de Y_1 sobre Y_2, X_1, y X_2? Justifique la respuesta.

- Se le pide que estime la ecuación de oferta por mínimos cuadrados en dos etapas. ¿Qué pasos seguiría? Explique brevemente su respuesta.
- Se le pide que estime la ecuación de demanda por mínimos cuadrados en dos etapas. ¿Qué pasos seguiría? Explique brevemente su respuesta.

20.4. Recordemos que el archivo TIM1, presentado al principio del capítulo 11, contiene 38 observaciones anuales de los Estados Unidos del período 1959-1996. Entre las variables se encuentran: V1 $=$ año; V2 $=$ PIB real (en miles de millones de dólares de 1992); V3 $=$ deflactor del PIB (índice = 100 en 1992); V4 $=$ $=$ cantidad de dinero nominal M1 (en miles de millones de dólares); V5 $=$ $=$ consumo real (en miles de millones de dólares de 1992), y V6 $=$ tipo de interés de las Letras del Tesoro a tres meses (en $\%$ anual). Utilizaremos este archivo para estimar un modelo macroeconómico presentado por Mirer (1995, capítulo 17), que lo ajustó utilizando sus datos de series temporales para los años 1956-1980.

En el modelo, las variables son: $Y_1 =$ consumo $=$ V5; $Y_2 =$ tipo de interés de las Letras del Tesoro $=$ V6; $Y_3 =$ PIB real = V2; $X_1 =$ consumo retardado (primer retardo de V5); $X_2 =$ cantidad real de dinero $=$ 100V4/V3; $X_3 =$ gasto autónomo $=$ V2$-$V5. Nótese que el consumo retardado se considera exógeno. Nótese también que debido a este retardo, nos quedan 37 observaciones útiles.

El modelo estructural tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad Y_1 = \alpha_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 + \alpha_4 X_1 + U_1\\
&(2) \qquad Y_2 = \alpha_5 + \alpha_6 Y_3 + \alpha_7 X_2 + U_2\\
&(3) \qquad Y_3 = Y_1 + X_3.
\end{aligned}
$$

Denominemos a las ecuaciones de la forma reducida de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&(4) \qquad Y_1 = \pi_1 + \pi_2 X_1 + \pi_3 X_2 + \pi_4 X_3 + V_1\\
&(5) \qquad Y_2 = \pi_5 + \pi_6 X_1 + \pi_7 X_2 + \pi_8 X_3 + V_2\\
&(6) \qquad Y_3 = \pi_9 + \pi_{10} X_1 + \pi_{11} X_2 + \pi_{12} X_3 + V_3.
\end{aligned}
$$

- Muestre que todos los α's están identificados. ¿Hay alguna condición de sobreidentificación?
- Estime las tres ecuaciones de forma reducida por medio de regresiones lineales MC.
- Construya las series de valores ajustados de estas regresiones, esto es, $\widehat{Y}_1$, $\widehat{Y}_2$, e $\widehat{Y}_3$.
- Observe el gran parecido de sus estimaciones de (4) y (6). Explique este parecido a partir de la identidad (3).
- Estime las ecuaciones estructurales (1) y (2) por mínimos cuadrados bietápicos.

20.5. Un investigador estima la ecuación de demanda del Modelo A de este capítulo por MC2E, y calcula los residuos $u_1 = Y_1 - \left(a_1^* Y_2 + a_2^* + a_3^* X_1\right)$. También ajusta la ecuación directamente mediante la regresión MC de Y_1 sobre Y_2, 1, y X_1, obteniendo los coeficientes b_1, b_2, y b_3, y de ahí los residuos $e_1 = Y_1 - (b_1 Y_2 + b_2 + b_3 X_1)$. ¿Qué suma de los cuadrados de los residuos será menor?

20.6. Considere la sección del ejemplo empírico de este capítulo.

- Muestre que las estimaciones muestrales de los coeficientes de la forma reducida, los p's, no satisfacen las restricciones implícitas en el modelo sobre los coeficientes poblacionales de la forma reducida, los π's.
- ¿Cómo tendría en cuenta este incumplimiento? ¿Podría emplear dicho incumplimiento como evidencia para determinar si es bueno el modelo?
- ¿Puede interpretar el estimador MC2E de α_1 como una media de los estimadores de α_1 alternativos que se pueden obtener por mínimos cuadrados indirectos?

20.7. **Curva de Engel** (revisión). En el ejercicio 13.7 de estimación de la curva de Engel para alimentación con el archivo ALI, no hemos tenido en cuenta que el gasto total puede ser endógeno, determinándose simultáneamente con el gasto en alimentación y el gasto en otros bienes. Para simplificar, concentrémonos en la especificación doble-logarítmica de la curva de Engel. Sea $Y_1 = \ln(\text{V1}) =$ ln (gasto en alimentación), $Y_2 = \ln(\text{V2}) =$ ln (gasto total), $X_1 = \text{V4} + \text{V5} - 2 =$ número de miembros del hogar (excluida la pareja), $X_2 = X_1^2 =$ número de miembros del hogar al cuadrado, $X_3 = \ln(\text{V3}) =$ ln (renta total). Considere el siguiente modelo estructural:

$$Y_1 = \alpha_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 X_1 + \alpha_4 X_2 + U_1$$
$$Y_2 = \alpha_5 + \alpha_6 X_3 + U_2$$

donde U_1 y U_2 son las correspondientes perturbaciones estructurales asociadas al logaritmo del gasto en alimentación y al logaritmo del gasto total.

- Efectúe la regresión de Y_2 sobre X_3 y sobre una constante, y calcule los valores ajustados $\widehat{Y}_2$.
- Efectúe después la regresión de Y_1 sobre $\widehat{Y}_2$, X_1 y X_2 y una constante. Compare los resultados con la regresión MC de Y_1 sobre Y_2, X_1 y X_2 y una constante. ¿Existe una diferencia sustancial entre los coeficientes estimados de $\widehat{Y}_2$ y de Y_2? (Nota: recuerde que en la primera regresión los errores estándar no son correctos, y que el R^2 no tiene interpretación alguna.)