1 Algunos preliminares geométricos

A fin de facilitar la lectura de este libro, resumiremos a continuación algunos resultados de geometría que serán utilizados en él. Tan solo se darán por conocidas las propiedades más elementales de los ángulos y de la semejanza de triángulos.

Ángulo inscrito en una circunferencia

Un ángulo está inscrito en una circunferencia si el vértice está sobre ella y los lados la cortan, abarcando entre ellos un cierto arco. La medida de este arco es siempre la mitad de la del ángulo. Para demostrar esto, supongamos en primer lugar que uno de los lados pasa por el centro de la circunferencia (Figura 1).

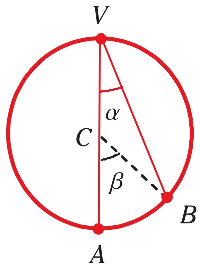

Figura 1

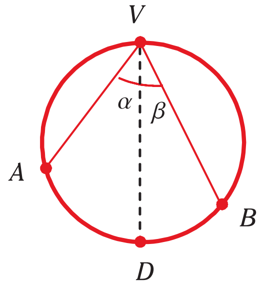

Figura 2

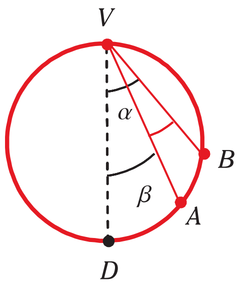

Figura 3

El ángulo β mide lo que el arco AB, y $\pi - \beta$ es un ángulo del triángulo isósceles VCB. Entonces $\pi - 2\alpha = \pi - arco\,AB$, y en consecuencia $\alpha = (1/2)\,arco\,AB$.

Si ningún lado del ángulo inscrito pasa por el centro, pueden suceder dos cosas. O bien el centro es interior al ángulo (Figura 2) o bien es exterior a él (Figura 3). En cualquiera de ambas situaciones trazamos el diámetro que pasa por el vértice y, en virtud del resultado anterior, tenemos, para el primer caso:

$$\begin{aligned} \text{\textit{Ángulo inscrito}} &= \alpha + \beta = (1/2)\,arco\,AD + (1/2)\,arco\,DB = \\ &= (1/2)\,arco\,AB \end{aligned}$$

Y para el segundo:

$$\textit{Ángulo inscrito} = \alpha - \beta = (1/2)\,\mathit{arco}\,BD - (1/2)\,\mathit{arco}\,AD =$$
$$= (1/2)\,\mathit{arco}\,AB$$

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Consideremos una circunferencia y un punto P. Desde él trazamos rectas que cortan a la circunferencia, la cual determina sobre cada una de ellas dos segmentos de origen P. El producto de las longitudes de ambos es un número fijo, cualquiera que sea la recta, y se llama *potencia del punto P respecto de la circunferencia*.

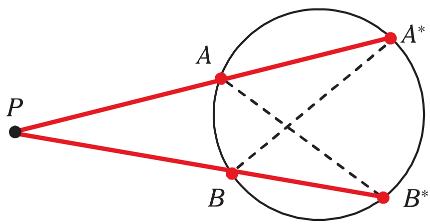

Figura 4

Veamos por qué esto es así. En la Figura 4 están dibujadas dos de las muchas rectas que pasan por P. Los ángulos inscritos en la circunferencia cuyos vértices son A^* y B^* son iguales, por abarcar el mismo arco, entonces los triángulos PBA^* y PAB^* son semejantes. En consecuencia, $PA/PB = PB^*/PA^*$ y $PA\,PA^* = PB\,PB^*$.

En el dibujo el punto es exterior a la circunferencia, pero el razonamiento es idéntico si fuera interior. En este caso la potencia se considera negativa, por tener distinto sentido los segmentos PA y PA^*.

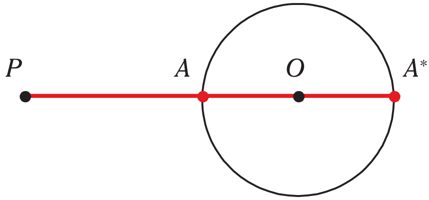

Figura 5

La potencia de un punto se puede calcular en función de su distancia al centro O de la circunferencia y del radio r de ésta. En efecto, mirando la Figura 5 se ve claramente lo siguiente:

$$\textit{Potencia de } P = PA\,PA^{*} = (PO - r)\,(PO + r) = PO^{2} - r^{2}$$

Teorema de Menelao

Según el teorema de Menelao, si una recta corta a los lados de un triángulo ABC en tres puntos M, N y P (como se puede ver en la Figura 6), sucede lo siguiente:

$$\frac{AM}{BM}\,\frac{BN}{CN}\,\frac{CP}{AP} = 1$$

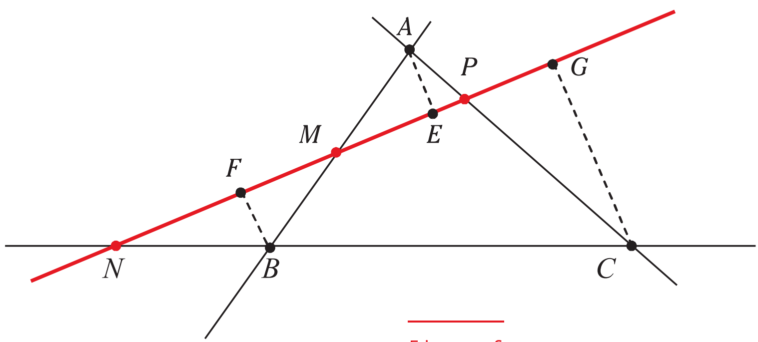

Figura 6

Para demostrarlo, trazamos perpendiculares desde los vértices del triángulo hasta la recta, que la encuentran en los puntos E, F y G. El triángulo AME es semejante a BMF, NCG lo es a NBF y APE a PCG. Estas tres semejanzas dan lugar a las igualdades que vienen a continuación (los signos negativos indican que los segmentos AM y BM, así como CP y AP, tienen orientaciones opuestas):

$$\frac{AM}{BM} = -\frac{AE}{BF} \quad \frac{BN}{CN} = \frac{BF}{CG} \quad \frac{CP}{AP} = -\frac{CG}{AE}$$

El producto de las tres lleva directamente a la tesis del teorema.

El teorema recíproco también es cierto: si tres puntos M, N y P, cada uno de ellos sobre un lado del triángulo, cumplen la relación de Menelao, son colineales. En efecto, la recta MN cortará al lado AC en un punto P^*. Por el teorema directo, sabemos que:

$$\frac{AM}{BM}\frac{BN}{CN}\frac{CP^*}{AP^*} = 1$$

Comparando esta igualdad con la que admitimos por hipótesis, tenemos que $P=P^*$, y los puntos M, N y P están en una misma recta.

Teorema de Ceva

Un hermoso y casi inmediato corolario del teorema de Menelao fue descubierto por el italiano Giovanni Ceva en el siglo XVII. Imaginemos tres rectas que parten cada una de ellas de los vértices A, B y C de un triángulo, y cortan a los lados opuestos en los puntos N, M y P respectivamente. Pues bien, el teorema de Ceva afirma que la condición necesaria y suficiente para que las rectas sean concurrentes es la siguiente (ver Figura 7):

$$\frac{AM}{BM}\frac{BN}{CN}\frac{CP}{AP} = -1$$

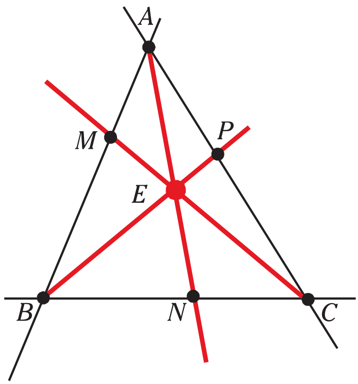

Figura 7

Para demostrar la necesidad, aplicamos el teorema de Menelao a los triángulos *ABN* y *ACN* (atravesado el primero por la recta *MC* y el segundo por la recta *BP*):

$$\frac{AM}{BM}\frac{BC}{NC}\frac{NE}{AE}=1 \qquad \frac{AE}{NE}\frac{NB}{CB}\frac{CP}{AP}=1$$

Multiplicando ambas expresiones, y teniendo en cuenta que $BC = -CB$, tenemos el resultado que buscamos. La demostración de la suficiencia del teorema de Ceva es idéntica a la del de Menelao. Sean tres puntos *M*, *N* y *P* sobre los lados de un triángulo que obedecen a la relación de Ceva. Consideramos los puntos *E* (intersección de las rectas *AN* y *CM*), y P^* (intersección de las rectas *BE* y *AC*). Por el teorema directo, sabemos que:

$$\frac{AM}{BM}\frac{BN}{CN}\frac{CP^*}{AP^*} = -1$$

Comparando esta igualdad con la hipótesis del teorema, vemos que $P = P^*$, y las rectas *AN*, *CM* y *BP* son concurrentes.